

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

La stabilité des Lagrangiens dans les systèmes de Saturne et Uranus

HOUDART, Aurélie

Award date:
2012

Awarding institution:
Université de Namur

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



**FACULTES UNIVERSITAIRES NOTRE-DAME DE LA PAIX
NAMUR**

Faculté des Sciences

LA STABILITÉ DES LAGRANGIENS DANS LES SYSTÈMES DE SATURNE ET URANUS

**Mémoire présenté pour l'obtention
du grade académique de master en « [Sciences mathématiques, à finalité approfondie](#) »**

Aurélie HOUDART

Juin 2012

Résumé

Ce mémoire étudie la stabilité des satellites Lagrangiens se situant aux points de Lagrange L_4 et L_5 dans le système de Saturne. Afin d'y parvenir, nous développons la partie quadratique du Hamiltonien.

Nous développons également une théorie séculaire afin d'étudier l'évolution des éléments orbitaux du satellite Lagrangien lors de l'ajout de perturbations dans le système comme l'aplatissement du corps central ou l'ajout de plusieurs satellites.

Finalement, nous appliquons la théorie séculaire au système d'Uranus afin d'identifier des résonances séculaires. Il apparaît que lorsqu'on se situe trop près d'une de ces résonances, le modèle devient invalide. Nous étudions également la sensibilité de l'excentricité aux conditions initiales.

Abstract

This master's thesis is about the stability of the satellites located at the Lagrangian points L_4 and L_5 in the saturnian system. To achieve this, we develop the quadratic part of the Hamiltonian.

We also develop a secular theory to study the evolution of the orbital elements of the particule when we include some perturbations in the system like the oblateness of the central body or additional bodies.

Finally, we apply this secular theory to the uranian system to predict the location of secular resonances. When we are too close of one of thoses resonances, the model becomes invalid. We also study the eccentricity sensitivity to the initial conditions.

Je tiens tout d'abord à remercier ma promotrice, Anne Lemaître, ainsi que Benoît Noyelles, co-promoteur, pour sa disponibilité, son aide, ses conseils et son soutien à la réalisation de ce mémoire.

Je voudrais également remercier Apostolos (Tolis) Christou et l'Observatoire d'Armagh (Irlande du Nord) de m'avoir acceptée pour un stage de 3 mois. Cela m'a permis de me plonger dans la recherche et de bien avancer dans la rédaction de ce mémoire.

Enfin je remercie ma famille et mes amis qui m'ont soutenu durant la réalisation de ce travail.

Introduction	1
1 Construction du Hamiltonien du système de Saturne et de ses satellites Lagrangiens	2
1.1 Hypothèses	2
1.2 Repère inertiel	3
1.3 Repère tournant	4
1.4 L'intégrale de Jacobi	6
1.5 Translation autour de L_4	7
1.6 Partie quadratique du Hamiltonien	11
2 Intégration numérique	19
2.1 Télésto	20
2.2 Hélène	23
3 Théorie séculaire	27
3.1 Les équations du mouvement	27
3.2 Comportement de δa et de ϕ	32
3.3 Solution séculaire	40
3.4 Intégration numérique	49
3.5 L'effet dû à l'aplatissement de Saturne	52
3.5.1 Comportement de δa et ϕ	54
3.5.2 Comparaison avec le modèle de base	58
3.5.3 Solution séculaire	59
3.5.4 Comparaison avec le modèle de base	60
3.6 Perturbation due à l'ajout de N corps	62
3.6.1 Solution séculaire pour N corps	63
3.6.2 Solution séculaire pour une particule perturbée par $N - 1$ corps	65
3.6.3 Solution séculaire pour un Lagrangien de m_k perturbé par $N - 1$ corps	68
3.6.4 Comportement de δa et ϕ pour un Lagrangien de m_k perturbé par $N - 1$ corps	70
4 Application à Uranus	72
4.1 Modèle de base	72
4.2 Ajout de l'aplatissement d'Uranus	74
4.3 Ajout d'un corps	76
4.4 Ajout des 3 derniers satellites	79
4.5 Changement d'orbite pour le Lagrangien	84

4.5.1	Lagrangien de Miranda	84
4.5.2	Lagrangien de Ariel	87
4.5.3	Lagrangien de Umbriel	89
4.5.4	Lagrangien de Obéron	91
4.6	Résumé des valeurs	93
4.7	Péricentres et nœuds	94
4.7.1	Circulation	94
4.7.2	Libration et circulation	96
4.7.3	Libration	98
4.8	Sensibilité	100
Conclusion		104
Bibliographie		105

TABLE DES FIGURES

1	Les points de Lagrange L_4 et L_5 dans le système de Saturne.	1
1.1	Repère inertiel (O, X, Y, Z) et les 3 corps.	3
1.2	Repère tournant (O, x, y, z) et les 3 corps.	4
1.3	Le point de Lagrange L_4	7
1.4	Le point de Lagrange L_5	8
1.5	Portrait de phase du point d'équilibre stable.	14
1.6	Foyer stable à gauche ($\alpha < 0$) et foyer instable à droite ($\alpha > 0$).	15
2.1	Représentation des éléments orbitaux. Source : [5].	19
2.2	Comparaison entre le demi-grand axe (en km) de Téthys et celui de Télésto, en fonction du temps (en années). La valeur moyenne $\langle a \rangle$ qu'on retire au demi-grand axe afin de centrer la courbe en zéro vaut $\langle a \rangle = 294672$ km.	21
2.3	(a) évolution de l'excentricité (en radians) de Téthys et Télésto en fonction du temps (en années). Le graphe en (b) est le même que en (a), mais sur une période de temps plus courte.	21
2.4	(a) évolution de l'inclinaison (en degrés) de Téthys et Télésto en fonction du temps (en années). Les graphes (b) et (c) représentent respectivement l'inclinaison de Télésto et Téthys, séparés, et avec une échelle de temps plus courte.	22
2.5	Argument résonant $\phi (= \lambda_{Télesto} - \lambda_{Téthys})$ (en degrés) en fonction du temps (en années).	22
2.6	Comparaison entre le demi-grand axe (en km) de Dioné et celui de Hélène, en fonction du temps (en années). La valeur moyenne $\langle a \rangle$ qu'on retire au demi-grand axe afin de centrer la courbe en zéro vaut $\langle a \rangle = 377415$ km.	24
2.7	(a) évolution de l'excentricité (en radians) de Dioné et Hélène en fonction du temps (en années). Le graphe en (b) est le même que en (a), mais sur une période de temps plus courte.	24
2.8	(a) évolution de l'inclinaison (en radians) de Dioné et Hélène en fonction du temps (en années). Les graphes en (b) et (c) sont les inclinaisons d'Hélène et Dioné respectivement, séparés et où on a réduit l'échelle de temps.	25
2.9	Argument résonant $\phi (\lambda_{Hélène} - \lambda_{Dioné})$ (en degrés) en fonction du temps (en années).	25
3.1	Repère inertiel (O, X, Y, Z) et les 3 corps.	27

3.2	Trajectoires pour différentes valeurs de E . En bleu, $-5/2 \mu_1 n_1^2 < E < -3/2 \mu_1 n_1^2$, en vert, $E = -5/2 \mu_1 n_1^2$ et en magenta, $E < -5/2 \mu_1 n_1^2$. Les étoiles rouges représentent L_4 à gauche et L_5 à droite. Finalement les étoiles noires représentent les racines de l'éq. (3.31).	37
3.3	Représentation de l'angle l . Source : Christou 2007 [1].	38
3.4	Évolution de la période de libration des orbites en forme de têtard pour l allant de 0 à 0.63 (ϕ allant de 60° à 23.9°) ainsi que pour les orbites en forme de fer à cheval pour $l > 0.63$.	39
3.5	Évolution de a_0 (divisé par $\sqrt{\mu_1}$) (en km) en fonction du l (en radian) (en rouge). La ligne bleue représente la valeur de l lorsqu'on se situe sur la séparatrice.	39
3.6	Évolution de l'Énergie E (divisée par $\mu_1 n_1$) en fonction du l (en radian) (en rouge). La ligne bleue représente la valeur de l lorsqu'on se situe sur la séparatrice.	39
3.7	Paramètre de la solution séculaire : $\gamma(l)/\mu_1 n_1$ en fonction de $a_0(l)/\sqrt{\mu_1}$.	42
3.8	Paramètres de la solution séculaire : $c(l)$ et $b(l)$ en fonction de $a_0(l)/\sqrt{\mu_1}$.	43
3.9	Excentricité e en fonction du temps avec comme conditions initiales les valeurs de la Table 3.1. Le temps est exprimé en fonction de la période T .	44
3.10	Partie réelle de z (k) en fonction de sa partie imaginaire (h) avec comme conditions initiales les valeurs de la Table 3.1.	44
3.11	Relations géométriques entre l'excentricité, l'excentricité forcée et propre ainsi que pour les longitudes du péricentre (dans le cas $e_{\text{propre}} > e_{\text{forcée}}$).	45
3.12	Paramètre de la solution séculaire : $\Gamma(l)/\mu_1 n_1$ en fonction de $a_0(l)/\sqrt{\mu_1}$.	47
3.13	Inclinaison I en fonction du temps avec comme conditions initiales les valeurs de la Table 3.2. Le temps est exprimé en fonction de la période T .	48
3.14	Partie réelle de Z , c'est-à-dire q , en fonction de sa partie imaginaire, p , avec les conditions initiales provenant de la Table 3.2.	48
3.15	Relations géométriques entre les différentes inclinaisons ainsi que les différentes longitudes du nœud ascendant (pour $I_{\text{propre}} < I_{\text{forcée}}$).	48
3.16	Excentricité et inclinaison en fonction du temps obtenues par l'intégration numérique du système avec les conditions initiales de la Table 3.3.	49
3.17	Excentricité et inclinaison en fonction de la différence des longitudes du péricentre et des longitudes du nœuds ascendant respectivement, obtenues par l'intégration numérique du système dont les conditions initiales sont reprises dans la Table 3.3.	50
3.18	Différence des longitudes du péricentre en fonction du temps.	51
3.19	Comparaison de $\delta a/a_1$ en fonction de ϕ entre le modèle analytique (magenta) et le modèle numérique (bleu) pour les mêmes valeurs de l'Énergie que précédemment : (a) $E = -2 \mu_1 n_1$, (b) $E = -5/2 \mu_1 n_1$, (c) $E = -4 \mu_1 n_1$ et le graphe en (d) a $E = -2.51 \mu_1 n_1$ pour la courbe numérique et $E = -5/2 \mu_1 n_1$ pour la courbe analytique.	52
3.20	Comparaison de $\delta a/a_1$ en fonction de ϕ pour le modèle sans aplatissement (magenta) et le modèle avec aplatissement (bleu) pour les mêmes valeurs de l'Énergie que précédemment : (a) $E = -2$, (b) $E = -4$, (c) $E = -5/2$ et (d) $E = -(5/2)(1 + 7J_2(R/a)^2)$.	58
3.21	Comparaison de l'excentricité e entre le modèle de base et le modèle avec aplatissement du corps central. (a) partie imaginaire h en fonction de la partie réelle k de z et (b) excentricité en fonction du temps, pour le modèle sans aplatissement (magenta) et le modèle avec aplatissement (bleu).	60
3.22	Comparaison de l'inclinaison I entre le modèle de base et le modèle avec aplatissement du corps central. (a) partie imaginaire p en fonction de la partie réelle q de Z et (b) excentricité en fonction du temps, pour le modèle sans aplatissement (magenta) et le modèle avec aplatissement (bleu).	61

3.23	Excentricité de Jupiter (rouge) et Saturne (bleu) sur une période de 200000 ans, centrée en 1983, avec les conditions initiales de la Table (3.8).	64
3.24	Inclinaison de Jupiter (rouge) et Saturne (bleu) sur une période de 200000 ans, centrée en 1983, avec les conditions initiales de la Table (3.8).	65
3.25	Évolution de la fréquence A_k en fonction du demi-grand axe variant de 0 à 30 UA. Les deux lignes pleines représentent les intersections entre A_k et les deux valeurs propres g_1 et g_2 . La ligne en pointillés représente l'intersection entre B_k et la valeur propre f_2 (f_1 étant égale à 0).	66
3.26	Evolution de $e_{\text{forcée}}$ (gauche) et $\varpi_{\text{forcée}}$ (droite) en fonction du demi-grand axe a de la particule au temps $t = 0$. Les points représentent les excentricités et longitudes du péricentre de Jupiter (1 ^{er}) et Saturne (2 ^e) en $t = 0$	67
3.27	Evolution de $I_{\text{forcée}}$ (gauche) et $\Omega_{\text{forcée}}$ (droite) en fonction du demi-grand axe a de la particule au temps $t = 0$. Les points représentent les inclinaisons et longitudes du nœud ascendant de Jupiter (1 ^{er}) et Saturne (2 ^e) en $t = 0$	68
3.28	Décomposition du mouvement en ses vecteurs forcés et propre.	69
4.1	(a) excentricité (en radians) et (b) inclinaison (en degrés) du Lagrangien de Titania en fonction du temps (en années) ainsi que la décomposition en vecteurs forcés et libres pour l'excentricité en (c) et l'inclinaison en (d).	73
4.2	Excentricité (en radians) du Lagrangien de Titania en fonction du temps (en années) pour $e_0 = 0.0012$	74
4.3	Inclinaison (en degrés) du Lagrangien de Titania en fonction du temps (en années) pour $I_0 = 0.13$	74
4.4	(a) excentricité (en radians) et (b) inclinaison (en degrés) du Lagrangien de Titania en fonction du temps (en années) ainsi que la décomposition en vecteurs forcés et libres pour l'excentricité en (c) et l'inclinaison en (d) lorsque l'on tient compte de l'aplatissement d'Uranus.	75
4.5	(a) excentricité (en radians) et (b) inclinaison (en degrés) de Titania et Umbriel en fonction du temps (en années).	76
4.6	Localisation des résonances séculaires dans le cas de l'excentricité en (a) et de l'inclinaison en (b) pour les deux satellites (Umbriel (m_3) et Titania (m_4)).	77
4.7	(a) excentricité (en radians) et (b) inclinaison (en degrés) du Lagrangien de Titania en fonction du temps (en années) ainsi que la décomposition en vecteurs forcés et libres pour l'excentricité en (c) et l'inclinaison en (d) lorsque l'on ajoute le satellite Umbriel au système, tout en tenant compte de l'aplatissement d'Uranus.	78
4.8	(a) excentricité (en radians) et (b) inclinaison (en degrés) des 5 satellites d'Uranus, perturbés par Uranus et eux-mêmes, en fonction du temps (en années).	80
4.9	Inclinaison des 5 satellites d'Uranus où on a retiré la courbe de l'inclinaison de Miranda.	80
4.10	Localisation des résonances séculaires dans le cas de l'excentricité en (a) et de l'inclinaison en (b) pour les cinq satellites.	81
4.11	(a) excentricité (en radians) et (b) inclinaison (en degrés) du Lagrangien de Titania en fonction du temps (en années) ainsi que la décomposition en vecteurs forcés et libres pour l'excentricité en (c) et l'inclinaison en (d) lorsque le modèle comprend Uranus, les 5 satellites, et la particule, tout en tenant compte de l'aplatissement d'Uranus.	82
4.12	(a) excentricité (en radians) du Lagrangien de Titania en fonction du temps (en années) ainsi que la décomposition en vecteurs forcés et libres pour l'excentricité en (b) pour $a_0 = 0$, lorsque le modèle comprend Uranus, les 5 satellites, et la particule, tout en tenant compte de l'aplatissement d'Uranus.	83

4.13	Comparaison de l'excentricité (en radians) du Lagrangien de Miranda, en rouge, lorsqu'il y a cinq corps et lorsque l'on tient compte de l'aplatissement d'Uranus, et en bleu, lorsqu'on ne tient compte que de Miranda, sans aplatissement.	84
4.14	Comparaison de l'inclinaison (en degrés) du Lagrangien de Miranda, en rouge, lorsqu'il y a cinq corps et lorsque l'on tient compte de l'aplatissement d'Uranus, et en bleu, lorsqu'on ne tient compte que de Miranda, sans aplatissement.	85
4.15	Différence des longitudes du péricentre du Lagrangien de Miranda (ϖ) et de Miranda (ϖ_{Miranda}) (en degrés) en fonction du temps (en années).	85
4.16	Longitude du péricentre de Miranda (ϖ_{Miranda}) (a) et de son lagrangien (ϖ) (b) (en degrés) sur une période de temps allant de 1000 à 1500 ans.	86
4.17	Différence des longitudes du nœud ascendant du Lagrangien de Miranda (Ω) et de Miranda (Ω_{Miranda}) en degrés, en fonction du temps (en années).	86
4.18	Comparaison de l'excentricité (en radians) du Lagrangien d'Ariel, en rouge, lorsqu'il y a cinq corps et lorsque l'on tient compte de l'aplatissement d'Uranus, et en bleu, lorsqu'on ne tient compte que d'Ariel, sans aplatissement.	87
4.19	(a) comparaison de l'inclinaison (en degrés) du Lagrangien d'Ariel, en rouge, lorsqu'il y a cinq corps et lorsque l'on tient compte de l'aplatissement d'Uranus, et en bleu, lorsqu'on ne tient compte que d'Ariel, sans aplatissement, et (b) inclinaison du Lagrangien sur une période de temps plus courte.	87
4.20	Différence des longitudes du péricentre (a) et des longitudes des nœuds ascendants (b) du Lagrangien de Ariel (ϖ et Ω) et de Ariel (ϖ_{Ariel} et Ω_{Ariel}) (en degrés) en fonction du temps (en années).	88
4.21	Comparaison de l'excentricité (en radians) du Lagrangien d'Umbriel, en rouge, lorsqu'il y a cinq corps et lorsque l'on tient compte de l'aplatissement d'Uranus, et en bleu, lorsqu'on ne tient compte que d'Umbriel, sans aplatissement.	89
4.22	(a) comparaison de l'inclinaison (en degrés) du Lagrangien d'Umbriel, en rouge, lorsqu'il y a cinq corps et lorsque l'on tient compte de l'aplatissement d'Uranus, et en bleu, lorsqu'on ne tient compte que d'Umbriel, sans aplatissement, et (b) inclinaison du Lagrangien sur une période de temps plus courte.	89
4.23	Différence des longitudes du péricentre (a) et des longitudes des nœuds ascendants (b) du Lagrangien de Umbriel (ϖ et Ω) et de Umbriel (ϖ_{Umbriel} et Ω_{Umbriel}) (en degrés) en fonction du temps (en années).	90
4.24	Comparaison de l'excentricité (en radians) du Lagrangien d'Obéron, en rouge, lorsqu'il y a cinq corps et lorsque l'on tient compte de l'aplatissement d'Uranus, et en bleu, lorsqu'on ne tient compte que d'Obéron, sans aplatissement.	91
4.25	(a) comparaison de l'inclinaison (en degrés) du Lagrangien d'Obéron, en rouge, lorsqu'il y a cinq corps et lorsque l'on tient compte de l'aplatissement d'Uranus, et en bleu, lorsqu'on ne tient compte que d'Obéron, sans aplatissement, et (b) inclinaison du Lagrangien sur une période de temps plus courte.	91
4.26	Différence des longitudes du péricentre (a) et des longitudes des nœuds ascendants (b) du Lagrangien de Obéron (ϖ et Ω) et de Obéron (ϖ_{Oberon} et Ω_{Oberon}) (en degrés) en fonction du temps (en années).	92
4.27	Différence des longitudes des péricentres de Titania et de son Lagrangien en fonction du temps.	94
4.28	Amplitude forcée (droite bleue) et amplitudes libres (points rouges) en fonction de leur fréquence correspondante.	94

4.29	Partie réelle en fonction de la partie imaginaire de la différence des longitudes des péricentres de Titania et son Lagrangien. On trace la courbe correspondant au vecteur forcé ainsi que le vecteur libre ayant l'amplitude la plus grande (a), puis on ajoute la 2 ^e plus grande amplitude (b), puis la 3 ^e (c), la 4 ^e (d), la 5 ^e (e), en enfin tous les vecteurs (f).	95
4.30	Différence des longitudes des péricentres d'Obéron et de son Lagrangien en fonction du temps.	96
4.31	Amplitude forcée (droite bleue) et amplitudes libres (points rouges) en fonction de leur fréquence correspondante.	96
4.32	Partie réelle en fonction de la partie imaginaire de la différence des longitudes des péricentres d'Obéron et son Lagrangien. On trace la courbe correspondant au vecteur forcé ainsi que le vecteur libre ayant l'amplitude la plus grande (a), puis on ajoute la 2 ^e plus grande amplitude (b), puis la 3 ^e (c), la 4 ^e (d), la 5 ^e (e), en enfin tous les vecteurs (f).	97
4.33	Amplitude forcée (droite bleue) et amplitudes libres (points rouges) en fonction de leur fréquence correspondante.	98
4.34	Partie réelle en fonction de la partie imaginaire de la différence des longitudes des péricentres d'Ariel et son Lagrangien. On trace la courbe correspondant au vecteur forcé ainsi que le vecteur libre ayant l'amplitude la plus grande (a), puis on ajoute la 2 ^e plus grande amplitude (b), puis la 3 ^e (c), la 4 ^e (d) et tous les vecteurs (e). Ensuite on regarde ce qu'il se passe autour de zéro (f).	99
4.35	(Excentricité (en radians) du Lagrangien de Titania en fonction du temps (en années).	100
4.36	Excentricité (en radians) du Lagrangien de Titania en fonction du temps (en années) lorsque le J_2 est diminué de (a) 5%, (b) 3%, (c) 1% et lorsqu'il est augmenté de (d) 1%, (e) 3% et enfin (f) 5%.	101
4.37	Excentricité (en radians) du Lagrangien de Titania en fonction du temps (en années) lorsque le demi-grand axe d'Umbriel est diminué de (a) 5%, (b) 3%, (c) 1% et lorsqu'il est augmenté de (d) 1%, (e) 3% et enfin (f) 5%.	102

1.1	Valeurs de μ pour Téthys et Dioné.	15
1.2	Fréquences de libration de Télésto et Hélène.	15
1.3	Moyen mouvement de Télésto et Hélène, provenant de [17].	16
1.4	Fréquences de libration de Télésto et Hélène.	16
1.5	Périodes de libration de Télésto et Hélène.	16
2.1	Conditions initiales pour l'intégration numérique de Téthys et Télésto. Celles-ci correspondent au 1 ^{er} janvier 2000 et sont données par rapport au plan de Laplace ⁰	20
2.2	Périodes du demi-grand axe, de l'excentricité et de l'inclinaison de Téthys et Télésto pour les conditions initiales de la Table 2.1, ainsi que la période de l'argument résonant.	23
2.3	Conditions initiales pour l'intégration numérique de Dioné et Hélène. Celles-ci sont celles du 1 ^{er} janvier 2000 et sont données par rapport au plan de Laplace.	23
2.4	Périodes du demi-grand axe, de l'excentricité et de l'inclinaison de Dioné et Hélène pour les conditions initiales de la Table 2.3.	26
3.1	Conditions initiales pour la solution séculaire (excentricité). Celles-ci proviennent de l'article de Morais (1999) [8].	43
3.2	Conditions initiales pour la solution séculaire (inclinaison) ([8]).	47
3.3	Conditions initiales pour l'intégration numérique. Celles-ci proviennent de l'article de Morais (1999) [8].	49
3.4	Comparaison des valeurs analytiques et numériques.	50
3.5	Comparaison des valeurs analytiques et numériques des paramètres c et b	50
3.6	Fréquences et Périodes du vecteur forcé et du vecteur propre pour l'excentricité lorsqu'on ajoute l'aplatissement du corps central.	61
3.7	Fréquences et Périodes du vecteur forcé et du vecteur libre pour l'inclinaison lorsqu'on ajoute l'aplatissement du corps central.	61
3.8	Conditions initiales pour Jupiter et Saturne correspondant à l'année 1983 provenant de [11].	64
4.1	Conditions initiales pour les satellites d'Uranus, provenant de [6].	72
4.2	Amplitudes et périodes de l'excentricité et de l'inclinaison du Lagrangien de Titania.	73
4.3	Fréquences et périodes des vecteurs forcé et propre de l'excentricité et l'inclinaison de Titania lorsqu'on ajoute l'aplatissement d'Uranus.	76

4.4	Amplitudes de l'excentricité et de l'inclinaison de Titania et Umbriel.	76
4.5	Fréquences séculaires pour Umbriel et Titania.	77
4.6	Comparaison des amplitudes et périodes de l'excentricité et de l'inclinaison du Lagrangien de Titania pour le modèle de base et pour le modèle avec aplatissement d'Uranus et ajout d'Umbriel.	79
4.7	Fréquences et périodes des vecteurs forcés et propres de l'excentricité et l'inclinaison de Titania lorsqu'on ajoute l'aplatissement d'Uranus ainsi qu'Umbriel (modèle des 4 corps).	79
4.8	Périodes d'oscillation des satellites d'Uranus, pour l'excentricité et l'inclinaison. .	81
4.9	Fréquences séculaires pour les 5 satellites.	81
4.10	Comparaison de l'amplitude et des périodes de l'inclinaison du Lagrangien de Titania pour le modèle de base et pour le modèle avec aplatissement d'Uranus et ses cinq satellites.	82
4.11	Comparaison de l'amplitudes et périodes de l'excentricité du Lagrangien de Titania pour le modèle de base et pour le modèle avec aplatissement d'Uranus et ajout d'Umbriel.	83
4.12	Fréquences et périodes des vecteurs forcés et propres de l'excentricité et l'inclinaison de Titania lorsqu'on ajoute l'aplatissement d'Uranus et qu'on tient compte des cinq satellites.	83
4.13	Comparaison de l'amplitude et de la période de l'excentricité du Lagrangien de Miranda pour le modèle de base et pour le modèle avec aplatissement d'Uranus et les cinq corps.	84
4.14	Comparaison de l'amplitude et de la période de l'inclinaison du Lagrangien de Miranda pour le modèle de base et pour le modèle avec aplatissement d'Uranus et les cinq corps.	85
4.15	Comparaison de l'amplitude et des périodes de l'excentricité du Lagrangien d'Ariel pour le modèle de base et pour le modèle avec aplatissement d'Uranus et les cinq corps.	87
4.16	Comparaison de l'amplitude et des périodes de l'inclinaison du Lagrangien d'Ariel pour le modèle de base et pour le modèle avec aplatissement d'Uranus et les cinq corps.	88
4.17	Comparaison de l'amplitude et de la période de l'excentricité du Lagrangien d'Umbriel pour le modèle de base et pour le modèle avec aplatissement d'Uranus et les cinq corps.	89
4.18	Comparaison de l'amplitude et des périodes de l'inclinaison du Lagrangien d'Umbriel pour le modèle de base et pour le modèle avec aplatissement d'Uranus et les cinq corps.	90
4.19	Comparaison de l'amplitude et des périodes de l'excentricité du Lagrangien d'Obéron pour le modèle de base et pour le modèle avec aplatissement d'Uranus et les cinq corps.	91
4.20	Comparaison de l'amplitude et de la période de l'inclinaison du Lagrangien d'Obéron pour le modèle de base et pour le modèle avec aplatissement d'Uranus et les cinq corps.	92
4.21	Résumé des valeurs des sections précédentes (amplitudes et périodes des Lagrangiens).	93
4.22	Valeurs de l'excentricité maximale atteinte et de la grande période de libration, lorsque l'on fait varier la valeur du J_2	100
4.23	Valeurs de l'excentricité maximale atteinte et de la grande période de libration, lorsque l'on fait varier le demi-grand axe d'Umbriel.	102

4.24	Valeurs de l'excentricité maximale atteinte et de la grande période de libration, lorsque l'on fait varier le demi-grand axe de Titania.	103
4.25	Valeurs de l'excentricité maximale atteinte et de la grande période de libration, lorsque l'on fait varier la masse d'Umbriel.	103
4.26	Valeurs de l'excentricité maximale atteinte et de la grande période de libration, lorsque l'on fait varier la masse de Titania.	103

Dans un système planétaire, les satellites Lagrangiens sont des petits corps situés à une distance angulaire de ± 60 degrés d'un satellite. Ces positions sont appelées les points de Lagrange L_4 et L_5 , et elles correspondent à des zones de stabilité dynamique. Deux des satellites de Saturne, Téthys et Dioné, possèdent des Lagrangiens (**Télesto** et **Calypso** pour **Téthys**, et **Hélène** et **Pollux** pour **Dioné**). Ces descriptions sont représentées sur la Figure 1

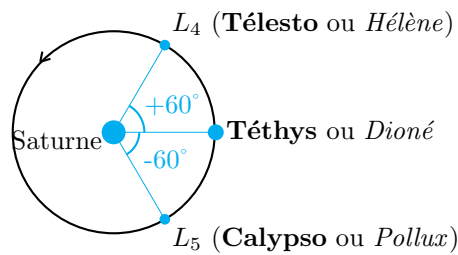


FIGURE 1 – Les points de Lagrange L_4 et L_5 dans le système de Saturne.

Télesto, Calypso et Hélène ont été découverts en 1980 lors du passage de la Terre dans le plan des anneaux de Saturne, car à cette occasion les anneaux sont vus par la tranche, ce qui limite leur luminosité et facilite les observations. Peu de temps après, les sondes Voyager ont atteint Saturne et ont confirmé ces découvertes. Le dernier, Pollux, a lui été découvert sur des images prises le 21 octobre 2004 par la sonde Cassini-Huygens. La méthode utilisée pour découvrir Pollux consiste à comparer deux photos prises successivement (ici environ 6 minutes d'intervalle) et à rechercher les objets qui ont changé de position par rapport aux étoiles lointaines.

Le chapitre 1 va construire et simplifier le Hamiltonien du système composé d'un corps central, d'un corps secondaire et de son Lagrangien, ainsi qu'étudier la stabilité des points de Lagrange L_4 et L_5 .

La chapitre 2 va utiliser l'intégrateur numérique RK4 sur le modèle afin de vérifier les résultats obtenus dans le chapitre un.

Le chapitre 3 est une étude de la théorie séculaire. Il est essentiellement basé sur les articles d'Hélène Morais ([8] et [9]). À partir des équations du mouvement, ce chapitre crée un modèle de base. Ensuite on ajoute l'aplatissement du corps central dans le modèle et enfin plusieurs corps, et on regarde comment évoluent les différents éléments orbitaux.

Et finalement, le chapitre 4 est une application du chapitre 3 sur le système d'Uranus. On y analyse également la sensibilité de l'excentricité aux conditions initiales.

CHAPITRE 1

CONSTRUCTION DU HAMILTONIEN DU SYSTÈME DE SATURNE ET DE SES SATELLITES LAGRANGIENS

Ce premier chapitre va construire et simplifier le Hamiltonien du système ainsi qu'étudier la stabilité des points de Lagrange L_4 et L_5 . Celui-ci se base sur les articles suivants : Deprit 1966 [2], Deprit (1967) [3], Oberti (1990) [14] et Oberti (2003) [15]. Il se base également sur le livre "Solar System Dynamics" [11] et sur le mémoire de Charles Hubaux (chapitre 1) [4].

1.1 Hypothèses

On considère trois corps célestes en mouvement, de masses m_1 , m_2 et m_3 . Dans notre cas, m_1 représente Saturne, m_2 , le satellite (Téthys ou Dioné) et enfin m_3 , le satellite Lagrangien.

Une bonne approximation du modèle est le problème plan circulaire restreint des trois corps dont les hypothèses sont les suivantes :

- La masse des satellites Lagrangiens, m_3 , est négligeable par rapport à m_1 et m_2 . En effet, la masse de Saturne est d'environ 5.68×10^{26} kg, celle de Téthys d'environ 6.175×10^{20} kg, et celle de Dioné d'environ 1.096×10^{21} kg. Par contre, les masses des satellites Lagrangiens sont de l'ordre de 10^{15} kg pour Télésto et Calypso, de 10^{16} kg pour Hélène et enfin de 10^{12} kg pour Pollux. La masse de ces satellites n'influence donc pas la dynamique des deux autres corps.
- L'excentricité de Téthys est égale à 0.0001 et celle de Dioné à 0.0022. On peut les supposer nulles, de telle sorte que les orbites soient circulaires autour du centre de masse O .
- L'inclinaison de Téthys vaut 1.091° et celle de Dioné 0.028° . On suppose alors que les orbites de m_1 et m_2 sont coplanaires, et que m_3 se déplace également dans ce plan.

Normalisons le problème. On suppose que la distance a entre Saturne et son satellite est égale à l'unité. De même, on suppose que la somme des masses de ces deux corps est unitaire : $m'_1 + m'_2 = 1$ où m'_1, m'_2 et m'_3 sont les nouvelles masses des corps. On pose donc

$$m'_1 = 1 - \mu \quad \text{et} \quad m'_2 = \mu \quad (1.1)$$

avec

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{et} \quad 0 < \mu \leq \frac{1}{2}. \quad (1.2)$$

On pose également que la constante de gravitation (\mathcal{G}) et le moyen mouvement des satellites ($n = \frac{2\pi}{T}$, où T est la période de révolution) sont égaux à l'unité. Ces hypothèses vérifient la 3^e loi de Kepler :

$$n^2 a^3 = \mathcal{G}(m'_1 + m'_2).$$

1.2 Repère inertiel

Les trois corps, Saturne, son satellite (Téthys ou Dioné) ainsi que le satellite Lagrangien (Télesto, Calypso, Hélène ou Pollux), sont placés dans un référentiel inertiel (O, X, Y, Z) où O est le centre de masse du système. Les coordonnées de m_1 (Saturne) sont (X_1, Y_1, Z_1) , celles de m_2 (satellite) sont (X_2, Y_2, Z_2) et enfin celles de m_3 (satellite Lagrangien) sont (X, Y, Z) . Le vecteur entre Saturne et le satellite Lagrangien est représenté par \vec{r} , et la distance entre ces deux corps vaut $\|\vec{r}\|$, que nous noterons r . Entre le satellite et le satellite Lagrangien, le vecteur est $\vec{\Delta}$, et la distance vaut $\|\vec{\Delta}\|$, que nous noterons Δ . Et finalement, le vecteur entre Saturne et le satellite est noté \vec{r}_1 , la distance vaut $\|\vec{r}_1\|$ que nous noterons r_1 . Cette description est représentée sur la Figure 1.1 :

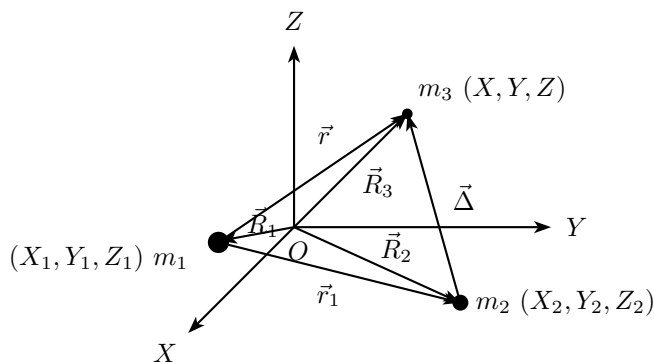


FIGURE 1.1 – Repère inertiel (O, X, Y, Z) et les 3 corps.

L'équation du mouvement du satellite Lagrangien est donnée par les équations de Newton :

$$m'_3 \ddot{r} = \mathcal{G} \frac{m'_1 m'_3}{r^3} \vec{r} + \mathcal{G} \frac{m'_2 m'_3}{\Delta^3} \vec{\Delta},$$

où la notation \dot{x} représente $\frac{dx}{dt}$ et $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$. On peut simplifier l'équation de Newton par m'_3 et utiliser l'hypothèse que $\mathcal{G} = 1$:

$$\ddot{r} = m'_1 \frac{\vec{r}}{r^3} + m'_2 \frac{\vec{\Delta}}{\Delta^3}.$$

Et on peut réécrire cette équation sous la forme du système suivant, en utilisant l'hypothèse que $m'_1 = 1 - \mu$ et $m'_2 = \mu$ (1.1) :

$$\begin{cases} \ddot{X} = (1 - \mu) \frac{X_1 - X}{r^3} + \mu \frac{X_2 - X}{\Delta^3} \\ \ddot{Y} = (1 - \mu) \frac{Y_1 - Y}{r^3} + \mu \frac{Y_2 - Y}{\Delta^3} \\ \ddot{Z} = (1 - \mu) \frac{Z_1 - Z}{r^3} + \mu \frac{Z_2 - Z}{\Delta^3}. \end{cases} \quad (1.3)$$

1.3 Repère tournant

Passons maintenant à un repère tournant (O, x, y, z) . On choisit ce repère de telle sorte que le mouvement des corps se situe dans le plan (x, y) , et que l'axe z soit l'axe de rotation. L'origine du repère correspond toujours au centre de masse du système. On le choisit également afin que m_1 et m_2 soient toujours alignés sur l'axe x . La vitesse de rotation est le moyen mouvement de m_1 et m_2 autour du barycentre, ce qui permet, comme l'orbite est circulaire, de garder m_1 et m_2 fixes. Leurs coordonnées sont donc respectivement $(x_1, 0, 0)$ et $(x_2, 0, 0)$. Les coordonnées du satellite Lagrangien (m_3) deviennent (x, y, z) . Cette description est représentée par la Figure 1.2 :

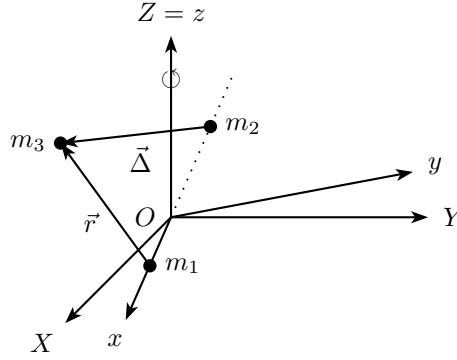


FIGURE 1.2 – Repère tournant (O, x, y, z) et les 3 corps.

On obtient alors :

$$\begin{cases} r^2 = (x - x_1)^2 + y^2 + z^2 \\ \Delta^2 = (x - x_2)^2 + y^2 + z^2. \end{cases}$$

La rotation entre les 2 repères est définie par :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Nous pouvons dériver deux fois chaque composante de (1.4). On obtient successivement :

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} - y \\ \dot{y} + x \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

et

$$\begin{pmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} - 2\dot{y} - x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y \\ \ddot{z} \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Le passage à un référentiel tournant a introduit des termes en \dot{x} et en \dot{y} qui représentent l'accélération de Coriolis, ainsi que des termes en x et y qui représentent l'accélération centrifuge.

Substituons (1.6) dans (1.3) :

$$(\ddot{x} - 2\dot{y} - x) \cos(t) - (\ddot{y} + 2\dot{x} - y) \sin(t) \quad (1.7)$$

$$= \left((1 - \mu) \frac{x_1 - x}{r^3} + \mu \frac{x_2 - x}{\Delta^3} \right) \cos(t) + \left((1 - \mu) \frac{1}{r^3} + \mu \frac{1}{\Delta^3} \right) y \sin(t)$$

$$(\ddot{x} - 2\dot{y} - x) \sin(t) + (\ddot{y} + 2\dot{x} - y) \cos(t) \quad (1.8)$$

$$= \left((1 - \mu) \frac{x_1 - x}{r^3} + \mu \frac{x_2 - X}{\Delta^3} \right) \sin(t) - \left((1 - \mu) \frac{1}{r^3} + \mu \frac{1}{\Delta^3} \right) y \cos(t)$$

$$\ddot{z} = - \left(\frac{1 - \mu}{r^3} + \frac{\mu}{\Delta^3} \right) z. \quad (1.9)$$

Multiplions (1.7) par $\cos(t)$ et (1.8) par $\sin(t)$:

$$(\ddot{x} - 2\dot{y} - x) \cos(t)^2 - (\ddot{y} + 2\dot{x} - y) \sin(t) \cos(t) \quad (1.10)$$

$$= \left((1 - \mu) \frac{x_1 - x}{r^3} + \mu \frac{x_2 - x}{\Delta^3} \right) \cos(t)^2 + \left(\frac{1 - \mu}{r^3} + \frac{\mu}{\Delta^3} \right) y \sin(t) \cos(t)$$

$$(\ddot{x} - 2\dot{y} - x) \sin(t)^2 + (\ddot{y} + 2\dot{x} - y) \cos(t) \sin(t) \quad (1.11)$$

$$= \left((1 - \mu) \frac{x_1 - x}{r^3} + \mu \frac{x_2 - x}{\Delta^3} \right) \sin(t)^2 - \left(\frac{1 - \mu}{r^3} + \frac{\mu}{\Delta^3} \right) y \cos(t) \sin(t).$$

Additionnons (1.10) et (1.11) :

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} - x &= (1 - \mu) \frac{x_1 - x}{r^3} + \mu \frac{x_2 - x}{\Delta^3} \\ &= - \left[(1 - \mu) \frac{x - x_1}{r^3} + \mu \frac{x - x_2}{\Delta^3} \right]. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Cette fois, multiplions (1.7) par $\sin(t)$ et (1.8) par $\cos(t)$ et additionnons les deux équations. On obtient finalement :

$$\ddot{y} + 2\dot{x} - y = - \left[\frac{1 - \mu}{r^3} + \frac{\mu}{\Delta^3} \right] y. \quad (1.13)$$

Les équations du mouvement deviennent donc :

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} - x &= - \left[(1 - \mu) \frac{x - x_1}{r^3} + \mu \frac{x - x_2}{\Delta^3} \right] \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y &= - \left[\frac{1 - \mu}{r^3} + \frac{\mu}{\Delta^3} \right] y \\ \ddot{z} &= - \left[\frac{1 - \mu}{r^3} + \frac{\mu}{\Delta^3} \right] z. \end{aligned}$$

Ces équations peuvent également s'écrire comme le gradient d'une fonction U :

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (1.14)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \quad (1.15)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (1.16)$$

où $U = U(x, y, z)$ est donnée par

$$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r} + \frac{\mu}{\Delta}.$$

Dans cette équation, le terme en $x^2 + y^2$ est le potentiel centrifuge, et le terme en $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{\Delta}$ est le potentiel gravitationnel.

La fonction U n'est pas un vrai potentiel, mais plutôt un pseudo-potentiel car le référentiel de référence n'est pas inertiel.

1.4 L'intégrale de Jacobi

Multiplions (1.14) par \dot{x} , (1.15) par \dot{y} et (1.16) par \dot{z} et additionnons ces trois nouvelles équations :

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{dU}{dt}. \quad (1.17)$$

Intégrons (1.17) :

$$\begin{aligned} \int (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) dt &= \int dU \\ \Leftrightarrow \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{\dot{z}^2}{2} + J &= U \\ \Leftrightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 &= 2U - J \end{aligned} \quad (1.18)$$

où J est une constante.

L'équation (1.18) est appelée intégrale de Jacobi.

Comme $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v^2$, on peut réécrire (1.18) comme suit :

$$J = 2U - v^2.$$

Le Hamiltonien du système est obtenu à partir de l'intégrale de Jacobi :

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2}J \\ &= \frac{1}{2}(v^2 - 2U) \\ &= \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} - \frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{1-\mu}{r} - \frac{\mu}{\Delta}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Revenons à (1.5), la dérivée des composantes de la rotation entre le repère inertiel et le repère tournant :

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} - y \\ \dot{y} + x \\ \dot{z} \end{pmatrix}.$$

Les moments sont donc :

$$\begin{cases} p_x = \dot{x} - y \\ p_y = \dot{y} + x \\ p_z = \dot{z}. \end{cases} \quad (1.20)$$

Comme le système est situé dans le plan, $\dot{z} = 0$ et $z = 0$. Réécrivons (1.20) :

$$\begin{cases} \dot{x} = p_x + y \\ \dot{y} = p_y - x. \end{cases} \quad (1.21)$$

Remplaçons maintenant (1.21) dans le Hamiltonien obtenu en (1.19) :

$$\begin{aligned} H(x, y, p_x, p_y) &= \frac{1}{2} ((p_x + y)^2 + (p_y - x)^2 - x^2 - y^2) - \frac{1-\mu}{r} - \frac{\mu}{\Delta} \\ &= \frac{1}{2} (p_x^2 + 2yp_x + y^2 + p_y^2 - 2xp_y + x^2 - x^2 - y^2) - \frac{1-\mu}{r} - \frac{\mu}{\Delta}. \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) - (xp_y - yp_x) - \frac{1-\mu}{r} - \frac{\mu}{\Delta}} \quad (1.22)$$

1.5 Translation autour de L_4

Dans les hypothèses de départ, nous avons supposé que la distance entre m_1 et m_2 était unitaire. On peut supposer que les positions de ces deux corps sont $(-\mu, 0)$ pour m_1 et $(1-\mu, 0)$ pour m_2 . Puisque le satellite Lagrangien L_4 est situé à une distance angulaire de 60 degrés de m_2 , les trois corps, m_1 , m_2 et m_3 forment un triangle équilatéral. Ce triangle et ces positions sont illustrées sur la Figure 1.3 :

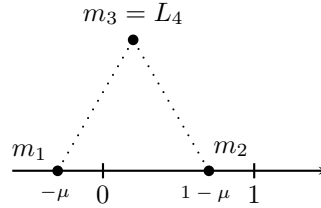


FIGURE 1.3 – Le point de Lagrange L_4 .

Les coordonnées du point d'équilibre L_4 sont donc les suivantes :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - \mu = \frac{1}{2}\gamma \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

où $\gamma = 1 - 2\mu$, et les moments deviennent :

$$\begin{cases} p_x = \dot{x} - y = 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ p_y = \dot{y} + x = 0 + \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\gamma. \end{cases}$$

Le Lagrangien situé en L_5 est lui situé à une distance angulaire de -60 degrés de m_2 . Pour trouver ses coordonnées, il suffit de remplacer y par $-y$ et p_x par $-p_x$ dans les coordonnées

de L_4 .

On peut donc représenter la position et les coordonnées de L_5 comme sur la Figure 1.4 :

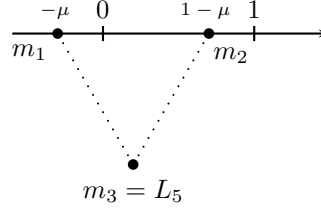


FIGURE 1.4 – Le point de Lagrange L_5 .

Les coordonnées et moments du point d'équilibre L_5 sont donc :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\gamma \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ p_x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ p_y = \frac{1}{2}\gamma. \end{cases}$$

Revenons à L_4 et regardons ce qu'il se passe autour de l'équilibre. Effectuons un changement de variables canonique afin de placer le centre du repère en L_4 :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\gamma + \xi \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \eta \\ p_x = -\frac{\sqrt{3}}{2} + p_\xi \\ p_y = \frac{1}{2}\gamma + p_\eta. \end{cases} \quad (1.23)$$

Vérifions que la transformation $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$ est bien canonique, c'est-à-dire, que cette transformation est différentiable, inversible et que sa matrice jacobienne est symplectique.

- **La transformation est-elle différentiable ?**

Le changement de coordonnées est bien différentiable car il s'agit de fonctions linéaires.

- **La transformation est-elle inversible ?**

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Le changement de variables est inversible et son inverse est le suivant :

$$\begin{cases} \xi = x - \frac{1}{2}\gamma \\ \eta = y - \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

- **La matrice jacobienne est-elle symplectique ?**

Calculons la matrice jacobienne A :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vérifions que cette matrice est bien symplectique, c'est-à-dire :

$$A^T J A = J \quad \text{où} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} A^T J A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= J. \end{aligned}$$

Le changement de variables est bien canonique.

On peut montrer d'une manière similaire que la transformation $(p_x, p_y) \mapsto (p_\xi, p_\eta)$ est également une transformation canonique.

Remplaçons (1.23) dans le Hamiltonien (1.22) :

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) - (xp_y - yp_x) - \frac{1-\mu}{r} - \frac{\mu}{\Delta} \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + p_\xi \right)^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma + p_\eta \right)^2 \right] - \left[\left(\frac{1}{2}\gamma + \xi \right) \left(\frac{1}{2}\gamma + p_\eta \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \eta \right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + p_\xi \right) \right] - \left(\frac{1 - \frac{1}{2}(1-\gamma)}{r} \right) - \left(\frac{\frac{1}{2}(1-\gamma)}{\Delta} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{4} + p_\xi^2 - \sqrt{3}p_\xi + \frac{1}{4}\gamma^2 + p_\eta^2 + \gamma p_\eta \right] - \left(\frac{1}{4}\gamma^2 + \frac{1}{2}\gamma p_\eta + \frac{1}{2}\xi\gamma + \xi p_\eta \right) \\
&\quad + \left(-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}p_\xi - \frac{\sqrt{3}}{2}\eta + \eta p_\xi \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1+\gamma}{r} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1-\gamma}{\Delta} \right) \\
&= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}p_\xi^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}p_\xi + \frac{1}{8}\gamma^2 + \frac{1}{2}p_\eta^2 + \frac{1}{2}\gamma p_\eta - \frac{1}{4}\gamma^2 - \frac{1}{2}\gamma p_\eta - \frac{1}{2}\xi\gamma \\
&\quad - \xi p_\eta - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}p_\xi - \frac{\sqrt{3}}{2}\eta + \eta p_\xi - \frac{1}{2} \left(\frac{1+\gamma}{r} + \frac{1-\gamma}{\Delta} \right) \\
&= \frac{1}{2} (p_\xi^2 + p_\eta^2) - (\xi p_\eta - \eta p_\xi) - \frac{1}{2} \left(\gamma\xi + \sqrt{3}\eta + \frac{1+\gamma}{r} + \frac{1-\gamma}{\Delta} \right) \\
&\quad - \frac{3}{8} (3 + \gamma^2).
\end{aligned}$$

Comme un Hamiltonien est défini à une constante près, on peut supprimer la constante de H , et le Hamiltonien devient :

$$\boxed{H(\xi, \eta, p_\xi, p_\eta) = \frac{1}{2} (p_\xi^2 + p_\eta^2) - (\xi p_\eta - \eta p_\xi) - \frac{1}{2} \left(\gamma\xi + \sqrt{3}\eta + \frac{1+\gamma}{r} + \frac{1-\gamma}{\Delta} \right)} \quad (1.24)$$

où

$$\begin{cases} r^2 = \left(\xi + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\eta + \frac{1}{2}\sqrt{3} \right)^2 \\ \Delta^2 = \left(\xi - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\eta + \frac{1}{2}\sqrt{3} \right)^2. \end{cases}$$

Si on applique un développement de Taylor à H en $\xi = \eta = 0$, alors on peut écrire le Hamiltonien sous forme d'une somme :

$$H = \sum_{n \geq 2} H_n \quad (1.25)$$

où la partie quadratique à laquelle on s'intéresse est :

$$\boxed{H_2 = \frac{1}{2} (p_\xi + p_\eta)^2 - (\xi p_\eta - \eta p_\xi) + \frac{1}{8}\xi^2 - \frac{3}{4}\gamma\sqrt{3}\xi\eta - \frac{5}{8}\eta^2} \quad (1.26)$$

et les autres termes sont, pour $n \geq 3$:

$$H_n = - \sum_{p=0}^n \omega_{p, n-p} \xi^p \eta^{n-p}.$$

1.6 Partie quadratique du Hamiltonien

Les équations d'Hamilton sont par définition :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi} = \frac{\partial H}{\partial p_{\xi}} \\ \dot{\eta} = \frac{\partial H}{\partial p_{\eta}} \\ \dot{p}_{\xi} = -\frac{\partial H}{\partial \xi} \\ \dot{p}_{\eta} = -\frac{\partial H}{\partial \eta}. \end{array} \right.$$

Calculons-les pour H_2 (1.26) :

$$\dot{\xi} = \frac{\partial H_2}{\partial p_{\xi}} = p_{\xi} + \eta \quad (1.27)$$

$$\dot{\eta} = \frac{\partial H_2}{\partial p_{\eta}} = p_{\eta} - \xi \quad (1.28)$$

$$\dot{p}_{\xi} = -\frac{\partial H_2}{\partial \xi} = p_{\eta} - \frac{1}{4}\xi + \frac{3\sqrt{3}}{4}\gamma\eta \quad (1.29)$$

$$\dot{p}_{\eta} = -\frac{\partial H_2}{\partial \eta} = -p_{\xi} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\gamma\xi - \frac{5}{4}\eta. \quad (1.30)$$

Dérivons (1.27) et (1.28) :

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= \dot{p}_{\xi} + \dot{\eta} \\ &\stackrel{(1.29)}{=} p_{\eta} - \frac{1}{4}\xi + \frac{3\sqrt{3}}{4}\gamma\eta + \dot{\eta} \\ &\stackrel{(1.28)}{=} \dot{\eta} + \xi - \frac{1}{4}\xi + \frac{3\sqrt{3}}{4}\gamma\eta + \dot{\eta} \\ &= 2\dot{\eta} + \frac{3}{4}\xi + \frac{3\sqrt{3}}{4}\gamma\eta \\ \ddot{\eta} &= \dot{p}_{\eta} - \dot{\xi} \\ &\stackrel{(1.30)}{=} -p_{\xi} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\gamma\xi + \frac{5}{4}\eta - \dot{\xi} \\ &\stackrel{(1.27)}{=} -\dot{\xi} + \eta + \frac{3\sqrt{3}}{4}\gamma\xi + \frac{5}{4}\eta - \dot{\xi} \\ &= -2\dot{\xi} + \frac{9}{4}\eta + \frac{3\sqrt{3}}{4}\gamma\xi. \end{aligned}$$

Les nouvelles équations du mouvement deviennent donc :

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} - \frac{3}{4}\xi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\gamma\eta = 0 \quad (1.31)$$

$$\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} - \frac{9}{4}\eta - \frac{3\sqrt{3}}{4}\gamma\xi = 0. \quad (1.32)$$

Dérivons deux fois les équations (1.31) et (1.32) :

$$\xi^{(3)} - 2\eta^{(2)} - \frac{3}{4}\xi^{(1)} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\gamma\eta^{(1)} = 0 \quad (1.33)$$

$$\eta^{(3)} + 2\xi^{(2)} - \frac{9}{4}\eta^{(1)} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\gamma\xi^{(1)} = 0 \quad (1.34)$$

et

$$\xi^{(4)} - 2\eta^{(3)} - \frac{3}{4}\xi^{(2)} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\gamma\eta^{(2)} = 0 \quad (1.35)$$

$$\eta^{(4)} + 2\xi^{(3)} - \frac{9}{4}\eta^{(2)} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\gamma\xi^{(2)} = 0. \quad (1.36)$$

où la notation $x^{(n)}$ représente $\frac{d^n x}{dt^n}$.

Isolons $\eta^{(2)}$ dans (1.32) et $\eta^{(3)}$ dans (1.34) et remplaçons-les dans (1.35) :

$$\begin{aligned} & \xi^{(4)} - 2 \left[-2\xi^{(2)} + \frac{9}{4}\eta^{(1)} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\gamma\xi^{(1)} \right] - \frac{3}{4}\xi^{(2)} \\ & \quad - \frac{3\sqrt{3}}{4}\gamma \left[-2\xi + \frac{9}{4}\eta + \frac{3\sqrt{3}}{4}\gamma\xi \right] = 0 \\ \Leftrightarrow & \quad \xi^{(4)} + \frac{13}{4}\xi^{(2)} - \frac{27}{16}\gamma^2\xi - \frac{9}{2}\eta^{(1)} - \frac{27\sqrt{3}}{16}\gamma\eta = 0. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Ensuite, isolons $\eta^{(1)}$ dans (1.31) et remplaçons-le dans (1.37) :

$$\begin{aligned} & \xi^{(4)} + \frac{13}{4}\xi^{(2)} - \frac{27}{16}\gamma^2\xi - \frac{9}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\xi^{(2)} - \frac{3}{4}\xi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\gamma\eta \right) \right] - \frac{27\sqrt{3}}{16}\gamma\eta = 0 \\ \Leftrightarrow & \quad \xi^{(4)} + \xi^{(2)} + \frac{27}{16}\xi(1 - \gamma^2) = 0. \end{aligned} \quad (1.38)$$

De cette dernière équation (1.38), on peut trouver le polynôme caractéristique suivant :

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{16}(1 - \gamma^2) = 0. \quad (1.39)$$

Posons : $s = \lambda^2$. L'équation (1.39) devient :

$$s^2 + s + \frac{27}{16}(1 - \gamma^2) = 0. \quad (1.40)$$

Calculons le discriminant Δ de l'équation (1.40) :

$$\Delta = 1 - \frac{27}{4}(1 - \gamma^2).$$

Les quatre racines de l'équation caractéristique (1.39) sont distinctes si et seulement si $\Delta \neq 0$.

$$\begin{aligned}
& \Delta \neq 0 \\
& \Leftrightarrow 1 - \frac{27}{4}(1 - \gamma^2) \neq 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{27}{4}(1 - \gamma^2) \neq 1 \\
& \Leftrightarrow -\gamma^2 \neq \frac{4}{27} - 1 \\
& \Leftrightarrow \gamma^2 \neq \frac{23}{27}.
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Comme $\gamma = 1 - 2\mu$, alors

$$\gamma^2 = 1 + 4\mu^2 - 4\mu. \tag{1.42}$$

Remplaçons (1.42) dans (1.41)

$$\begin{aligned}
& \Delta \neq 0 \\
& \Leftrightarrow 4\mu^2 - 4\mu + 1 \neq \frac{23}{27} \\
& \Leftrightarrow -\mu^2 + \mu - \frac{1}{27} \neq 0.
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Calculons le discriminant Δ_2 de l'équation (1.43) :

$$\Delta_2 = 1 - 4(-1) \left(-\frac{1}{27} \right) = \frac{23}{27}.$$

Calculons maintenant les racines :

$$\mu_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{\frac{23}{27}}}{-2} = \frac{1}{2} \left(1 \mp \sqrt{\frac{23}{27}} \right).$$

Elles valent donc :

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{23}{27}} \right) = 0.0385208965 \\
\mu_2 &= \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{23}{27}} \right) = 0.9614791035.
\end{aligned}$$

La racine μ_2 est rejetée, car nous avons posé en (1.2) : $\mu \leq \frac{1}{2}$.

Finalement, pour que les quatre racines soient distinctes, μ doit être différent de la masse critique de Gascheau (ou de Routh), c'est-à-dire, de μ_1 :

$$\mu \neq \mu_1 = 0.0385208965.$$

- Si $\mu < \mu_1$, alors les racines sont distinctes et purement imaginaires. Elles sont du type $\pm i\omega_1$ et $\pm i\omega_2$.

Les deux racines de l'équation caractéristique (1.40) sont :

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{4} \left(-\sqrt{27\gamma^2 - 23} - 2 \right) \\ s_2 &= \frac{1}{4} \left(\sqrt{27\gamma^2 - 23} - 2 \right). \end{aligned}$$

Comme $s = \lambda^2$, alors $\lambda = \pm\sqrt{s}$ et les quatres racines de l'équation caractéristique (1.39) sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} \sqrt{-\sqrt{27\gamma^2 - 23} - 2} &= i\omega_1 \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{27\gamma^2 - 23} - 2} &= i\omega_2 \\ \lambda_3 = -\frac{1}{2} \sqrt{-\sqrt{27\gamma^2 - 23} - 2} &= -i\omega_1 \\ \lambda_4 = -\frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{27\gamma^2 - 23} - 2} &= -i\omega_2 \end{cases} \quad (1.44)$$

où les nombres réels ω_1 et ω_2 vérifient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} 0 < \omega_2 < \sqrt{\frac{1}{2}} < \omega_1 < 1 \\ \omega_1^2 + \omega_2^2 &= 1 \\ 16\omega_1^2\omega_2^2 &= 27(1 - \gamma^2). \end{aligned}$$

La solution de l'équation différentielle ordinaire (EDO) est alors stable et de la forme :

$$Ae^{i\omega_1 t} + Be^{i\omega_2 t}$$

ou bien, sous forme réelle :

$$A \sin(\omega_1 t + \phi_1) + B \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

où A et B sont des constantes différentes. On obtient donc des orbites qui tournent autour du point de Lagrange, comme nous pouvons l'observer sur le portrait de phase suivant (Fig. 1.5) :

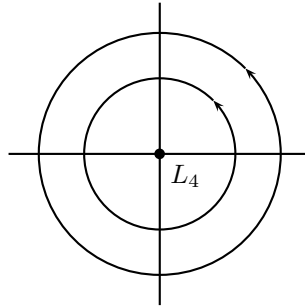


FIGURE 1.5 – Portrait de phase du point d'équilibre stable.

- Si $\mu > \mu_1$, alors les racines sont de la forme $\pm\alpha \pm i\beta$ où les nombres réels α et β sont différents de zéro.

La solution de l'EDO est alors la suivante :

$$Ae^{\alpha t} \sin(\beta t) + Be^{\alpha t} \cos(\beta t).$$

La stabilité dépend de la valeur de α . Si α est négatif, alors les orbites tendent vers zéro, et la solution de l'EDO est stable. Par contre, si α est positif, alors la solution diverge, c'est-à-dire, les orbites s'éloignent à l'infini. Les portraits de phases sont représentés à la Figure 1.6 :

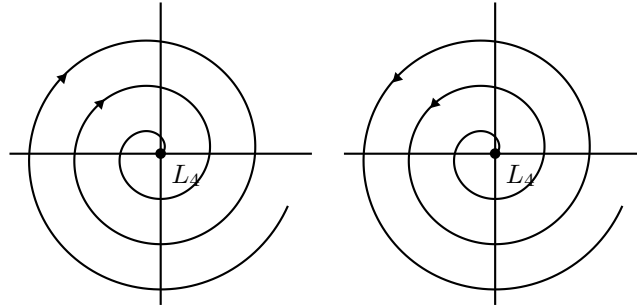


FIGURE 1.6 – Foyer stable à gauche ($\alpha < 0$) et foyer instable à droite ($\alpha > 0$).

Si $\mu = \mu_\infty = 0.0463004$, alors les orbites deviennent chaotiques.

Si on remplace les valeurs des masses de Saturne et de son satellite, provenant du site du JPL [17], dans μ , ce dernier vaut :

TABLE 1.1 – Valeurs de μ pour Téthys et Dioné.

	Téthys	Dioné
μ	1.087×10^{-6}	1.929×10^{-6}

On se situe donc dans le premier cas.

Calculons les valeurs de ω_1 et ω_2 qui représentent les fréquences pour la petite et grande période de libration du satellite situé en L_4 . Ces fréquences, qui ne dépendent que des masses des corps, valent, pour les Lagrangiens de Téthys (Télesto) et de Dioné (Hélène) :

TABLE 1.2 – Fréquences de libration de Télesto et Hélène.

	Télesto	Hélène
ω_1	0.999996330850201	0.999993487595160
ω_2	0.002708927118708	0.003608984243231

Nous avons supposé, dans les hypothèses de départ, que le moyen mouvement n était égal à l'unité. Si on reprend les vraies valeurs de n , issues du site du JPL [17], c'est-à-dire

TABLE 1.3 – Moyen mouvement de Télésto et Hélène, provenant de [17].

	Télésto	Hélène
n	1215.664 rad/an	838.511 rad/an

alors on peut multiplier les fréquences par n et elles deviennent

TABLE 1.4 – Fréquences de libration de Télésto et Hélène.

	Télésto	Hélène
ω_1	1215.659 rad/an	838.505 rad/an
ω_2	3.293 rad/an	3.026 rad/an

ce qui représente une période de libration de

TABLE 1.5 – Périodes de libration de Télésto et Hélène.

	Télésto	Hélène
T_1	1.8878 jour	2.7369 jours
T_2	1.9080 an	2.0763 ans

Revenons au Hamiltonien H_2 et effectuons encore une transformation canonique $(\xi, \eta, p_\xi, p_\eta) \mapsto (\phi_1, \phi_2, I_1, I_2)$ où (ϕ_1, ϕ_2) sont des angles, et (I_1, I_2) sont des actions :

$$\begin{cases} \xi = a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 + a_{13}P_1 + a_{14}P_2 \\ \eta = a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2 + a_{23}P_1 + a_{24}P_2 \\ p_\xi = a_{31}Q_1 + a_{32}Q_2 + a_{33}P_1 + a_{34}P_2 \\ p_\eta = a_{41}Q_1 + a_{42}Q_2 + a_{43}P_1 + a_{44}P_2 \end{cases} \quad (1.45)$$

où, pour $i = 1, 2$:

$$\begin{cases} Q_i = \sqrt{\frac{2I_i}{\omega_i}} \sin \phi_i \\ P_i = \sqrt{2I_i\omega_i} \cos \phi_i \end{cases} \quad (1.46)$$

On définit les a_{ij} de telle sorte que les variables qui dépendent des angles ϕ_1 et ϕ_2 disparaissent.

Pour cela, remplaçons les nouvelles coordonnées (1.45) et (1.46) dans H_2 calculé en (1.26).

Ensuite, on crée huit nouvelles variables :

$$\begin{cases} C_1 : \text{coefficient du terme } I_1 \sin^2 \phi_1 \\ C_2 : \text{coefficient du terme } I_1 \cos^2 \phi_1 \\ C_3 : \text{coefficient du terme } I_2 \sin^2 \phi_2 \\ C_4 : \text{coefficient du terme } I_2 \cos^2 \phi_2 \\ C_5 : \text{coefficient du terme } \sqrt{I_1 I_2} \cos \phi_1 \cos \phi_2 \\ C_6 : \text{coefficient du terme } \sqrt{I_1 I_2} \sin \phi_1 \cos \phi_2 \\ C_7 : \text{coefficient du terme } \sqrt{I_1 I_2} \sin \phi_1 \sin \phi_2 \\ C_8 : \text{coefficient du terme } \sqrt{I_1 I_2} \cos \phi_1 \sin \phi_2. \end{cases}$$

Le Hamiltonien H_2 devient alors :

$$\begin{aligned} H_2 = & C_1 I_1 \sin^2 \phi_1 + C_2 I_1 \cos^2 \phi_1 + C_3 I_2 \sin^2 \phi_2 + C_4 I_2 \cos^2 \phi_2 \\ & + C_5 \sqrt{I_1 I_2} \cos \phi_1 \cos \phi_2 + C_6 \sqrt{I_1 I_2} \sin \phi_1 \cos \phi_2 \\ & + C_7 \sqrt{I_1 I_2} \sin \phi_1 \sin \phi_2 + C_8 \sqrt{I_1 I_2} \cos \phi_1 \sin \phi_2. \end{aligned}$$

On aimerait qu'il soit de la forme suivante, c'est-à-dire normalisé :

$$H_2 = \omega_1 I_1 - \omega_2 I_2. \quad (1.47)$$

Afin d'obtenir (1.47), on pose :

$$\begin{cases} C_1 = C_2 = \omega_1 \\ C_3 = C_4 = -\omega_2 \\ C_5 = C_6 = C_7 = C_8 = 0. \end{cases} \quad (1.48)$$

Après résolution du système (1.48), on obtient finalement la matrice $\mathcal{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4}$:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{l_1}{2k\omega_1} & \frac{-l_2}{2k\omega_2} \\ \frac{-4\omega_1}{kl_1} & \frac{-4\omega_2}{kl_2} & \frac{-3\gamma\sqrt{3}}{2kl_1\omega_1} & \frac{3\gamma\sqrt{3}}{2kl_2\omega_2} \\ \frac{-m_1\omega_1}{2kl_1} & \frac{-m_2\omega_2}{2kl_2} & \frac{3\gamma\sqrt{3}}{2kl_1\omega_1} & \frac{-3\gamma\sqrt{3}}{2kl_2\omega_2} \\ \frac{3\gamma\sqrt{3}\omega_1}{2kl_1} & \frac{3\gamma\sqrt{3}\omega_2}{2kl_2} & \frac{n_1}{2kl_1\omega_1} & \frac{n_2}{2kl_2\omega_2} \end{pmatrix}$$

où on a posé pour plus de facilité, pour $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{2\omega_1^2 - \frac{1}{2}} = \sqrt{1 - 2\omega_2^2} \\ l_i &= \sqrt{9 + 4\omega_i^2} \\ m_i &= 1 + 4\omega_i^2 \\ n_i &= 9 - 4\omega_i^2. \end{aligned}$$

Finalement, la partie quadratique du Hamiltonien de départ est :

$$\boxed{H_2 = \omega_1 I_1 - \omega_2 I_2}$$

Cet Hamiltonien est la composition de deux mouvements elliptiques de fréquences ω_1 pour la petite période et ω_2 pour la grande période. Ces fréquences, calculées en (1.44), ne dépendent, comme déjà dit, que des masses des corps.

Appliquons les équations d'Hamilton au Hamiltonien H_2 :

$$\begin{cases} \frac{dI_1}{dt} = -\frac{\partial H_2}{\partial \phi_1} = 0 \\ \frac{dI_2}{dt} = -\frac{\partial H_2}{\partial \phi_2} = 0 \\ \frac{d\phi_1}{dt} = \frac{\partial H_2}{\partial I_1} = \omega_1 \\ \frac{d\phi_2}{dt} = \frac{\partial H_2}{\partial I_2} = -\omega_2. \end{cases}$$

Les solutions générales de (1.47) sont donc :

$$\begin{cases} I_1 = \text{constante} \\ I_2 = \text{constante} \\ \phi_1(t) = \omega_1 t + \phi_1(0) \\ \phi_2(t) = -\omega_2 t + \phi_2(0), \end{cases}$$

et les trajectoires correspondantes (1.45) :

$$\begin{cases} \eta = \frac{l_1}{k\sqrt{2\omega_1}}\sqrt{I_1}\cos(\phi_1) - \frac{l_2}{k\sqrt{2\omega_2}}\sqrt{I_2}\cos(\phi_2) \\ \xi = -\frac{4\sqrt{2\omega_1}}{kl_1}\sqrt{I_1}\sin(\phi_1) - \frac{4\sqrt{2\omega_2}}{kl_2}\sqrt{I_2}\sin(\phi_2) \\ \quad - \frac{3\gamma\sqrt{3}}{kl_1\sqrt{2\omega_1}}\sqrt{I_1}\cos(\phi_1) + \frac{3\gamma\sqrt{3}}{kl_2\sqrt{2\omega_2}}\sqrt{I_2}\cos(\phi_2) \\ p_\eta = -\frac{m_1\sqrt{\omega_1}}{\sqrt{2}kl_1}\sqrt{I_1}\sin(\phi_1) - \frac{m_2\sqrt{\omega_2}}{\sqrt{2}kl_2}\sqrt{I_2}\sin(\phi_2) \\ \quad + \frac{3\gamma\sqrt{3}}{kl_1\sqrt{2\omega_1}}\sqrt{I_1}\cos(\phi_1) - \frac{3\gamma\sqrt{3}}{kl_2\sqrt{2\omega_2}}\sqrt{I_2}\cos(\phi_2) \\ p_\xi = \frac{3\gamma\sqrt{3}\sqrt{\omega_1}}{\sqrt{2}kl_1}\sqrt{I_1}\sin(\phi_1) + \frac{3\gamma\sqrt{3}\sqrt{\omega_2}}{\sqrt{2}kl_2}\sqrt{I_2}\sin(\phi_2) \\ \quad + \frac{n_1}{kl_1\sqrt{2\omega_1}}\sqrt{I_1}\cos(\phi_1) + \frac{n_2}{kl_2\sqrt{2\omega_2}}\sqrt{I_2}\cos(\phi_2). \end{cases}$$

Ces solutions sont celles d'un modèle approché, qui considère un satellite Lagrangien de masse négligeable, d'inclinaison nulle ainsi qu'une orbite circulaire pour le corps secondaire. Pour représenter le mouvement des Lagrangiens de Téthys et Dioné avec plus de précision, il faut tenir compte d'autres paramètres comme les masses des Lagrangiens, leurs excentricités, leurs inclinaisons, l'aplatissement de Saturne, la perturbation d'autres corps, etc.

Pour vérifier les résultats obtenus dans le chapitre précédent, on utilise l'intégrateur numérique Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) sur le modèle composé d'abord de Saturne, Téthys et Télésto et ensuite de Saturne, Dioné et Hélène. Cet intégrateur est valable pour N-corps et tient compte également de l'aplatissement du corps central via le J_2 .

Les conditions initiales sont données grâce aux éléments orbitaux. Ils sont les suivants :

- **Demi-grand axe a** :
Le demi-grand axe de l'orbite est la moitié du grand axe de l'ellipse.
- **Excentricité e** :
Si l'excentricité est nulle, $e = 0$, alors l'orbite est un cercle, si $0 < e < 1$ alors l'orbite est une ellipse, si $e = 1$, alors l'orbite est une parabole et finalement si $e > 1$, l'orbite est une hyperbole.
- **Argument du péricentre ω** :
L'argument du péricentre est l'angle, dans le plan orbital, entre la ligne des nœuds et le péricentre P .
- **Anomalie moyenne M** :
L'anomalie moyenne est l'angle entre la position actuelle du corps et le péricentre.
- **Inclinaison I** :
L'inclinaison est l'angle entre le plan de référence et le plan orbital.
- **Longitude du nœud ascendant Ω** :
La longitude du nœud ascendant est l'angle entre la ligne des nœuds et la direction de référence (par ex : la direction du Soleil).

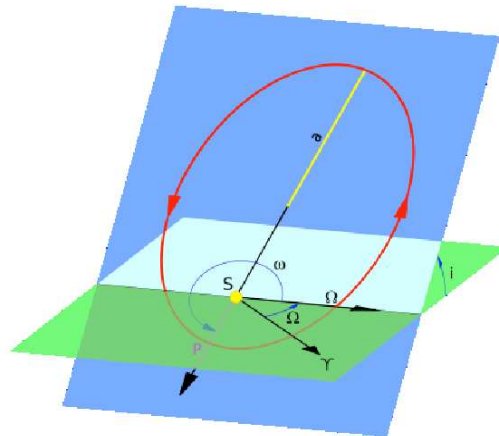


FIGURE 2.1 – Représentation des éléments orbitaux. Source : [5].

Longitude du péricentre ϖ :

On définit le nouvel angle ϖ comme la somme de l'argument du péricentre et la longitude du nœud ascendant :

$$\varpi = \omega + \Omega.$$

Longitude moyenne λ :

La longitude moyenne est définie par la somme de l'argument du péricentre et de l'anomalie moyenne

$$\lambda = \varpi + M.$$

Argument résonant ϕ :

L'argument résonant entre deux satellites est défini comme la différence des longitudes moyennes de ces deux satellites :

$$\phi = \lambda - \lambda_1.$$

2.1 Télésto

Commençons donc avec le modèle comprenant Saturne comme corps central, Téthys comme corps secondaire et Télésto comme Lagrangien.

On utilise les conditions initiales suivantes, où les demi-grands axes, excentricités, inclinaisons et GM proviennent du site du JPL ([17]) :

TABLE 2.1 – Conditions initiales pour l'intégration numérique de Téthys et Télésto. Celles-ci correspondent au 1^{er} janvier 2000 et sont données par rapport au plan de Laplace².

	Téthys	Télésto
a	294672 km	294720 km
e	0.0001 rad	0.0002 rad
w	0°	0°
M	0°	60°
I	1.091°	1.18°
Ω	0°	0°
GM	41.2067 km ³ s ⁻²	0.00027 km ³ s ⁻²
$GM_{Saturne} = 37931208 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$		
$R_{Saturne} = 60330 \text{ km}$		
$J_{2Saturne} = 0.01629$		

Dans notre cas, on suppose que la masse du Lagrangien est négligeable, donc on utilise $GM = 0$ pour Télésto.

La Figure 2.2 représente le demi-grand axe de Téthys (en rouge) et celui de Télésto (en bleu), en fonction du temps. Afin de mieux quantifier l'amplitude, on a centré la courbe en zéro.

Le demi-grand axe de Télésto oscille avec une amplitude d'environ 50 km autour de la valeur du

2. Le plan de Laplace est défini comme le plan moyen qui contient le nœud de précession du satellite. On l'utilise pour décrire les orbites des satellites des planètes géantes. Le plan de Laplace est compris entre le plan orbital et le plan équatorial de la planète. Si on est proche de la planète, le plan de Laplace sera proche du plan équatorial de la planète et plus on s'en éloigne, plus le plan de Laplace s'approche du plan orbital.

semi-grand axe de Téthys avec une période de 1.9076 an. Cela signifie que Télésto ne se situe pas sur le point de Lagrange L_4 de Téthys mais oscille autour. Sa distance par rapport à L_4 , dans la direction de Saturne, est de ± 50 km. Le demi-grand axe a également une petite période de libration qui est de 1.8847 jour pour Télésto et de 1.8862 jour pour Téthys.

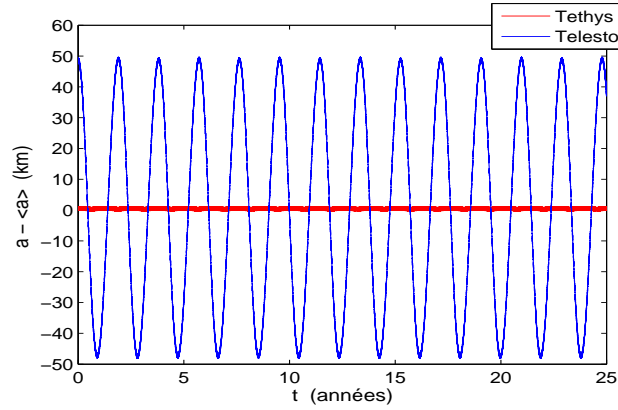


FIGURE 2.2 – Comparaison entre le demi-grand axe (en km) de Téthys et celui de Télésto, en fonction du temps (en années). La valeur moyenne $\langle a \rangle$ qu'on retire au demi-grand axe afin de centrer la courbe en zéro vaut $\langle a \rangle = 294672$ km.

L'excentricité en fonction du temps est tracée sur la Figure 2.3 (a).

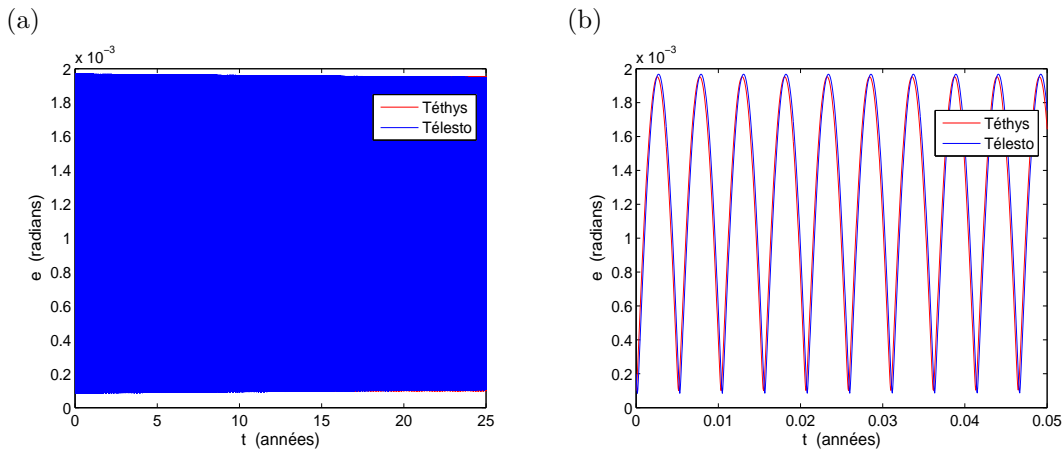


FIGURE 2.3 – (a) évolution de l'excentricité (en radians) de Téthys et Télésto en fonction du temps (en années). Le graphe en (b) est le même que en (a), mais sur une période de temps plus courte.

Sur la Figure 2.3 (b) on remarque que les excentricités de Télésto et Téthys ont la même amplitude et la même période. L'excentricité varie entre environ 0.1×10^{-3} et 2×10^{-3} radian pour Télésto ainsi que Téthys et la période est de 1.8885 jour.

Sur la Figure 2.4, on peut observer l'inclinaison de Téthys et Télésto en fonction du temps.

Pour plus de clarté, on a séparé les inclinaisons des deux satellites représentées en (a) en deux graphes : (b) pour Télésto et (c) pour Téthys, tout en réduisant l'échelle de temps.

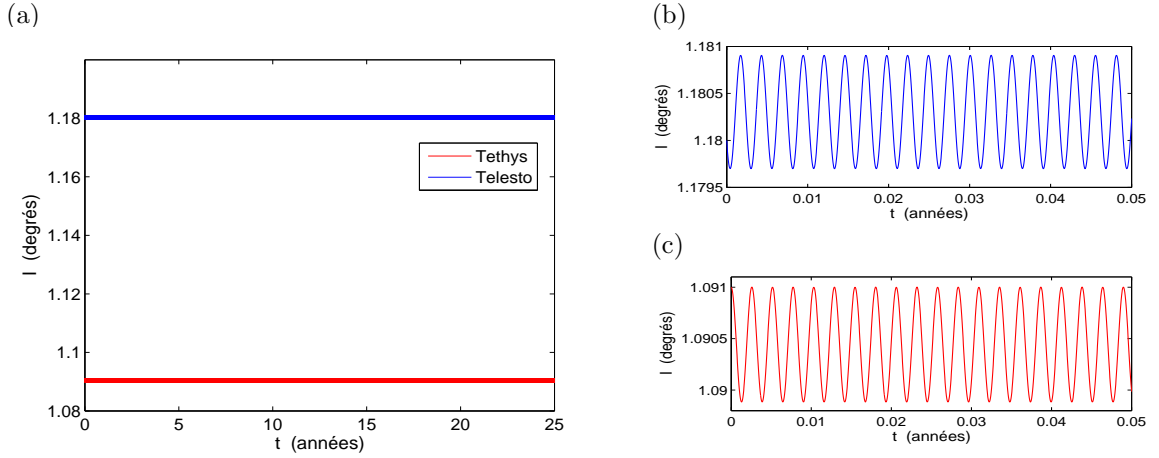


FIGURE 2.4 – (a) évolution de l'inclinaison (en degrés) de Téthys et Télésto en fonction du temps (en années). Les graphes (b) et (c) représentent respectivement l'inclinaison de Télésto et Téthys, séparés, et avec une échelle de temps plus courte.

On remarque sur les Figures 2.4 (b) et (c) que la période de libration est la même. Celle-ci vaut 0.9423 jour.

La Figure suivante (2.5) représente la différence des longitudes moyennes des deux satellites ($\lambda_{Telesto} - \lambda_{Tethys}$), c'est-à-dire, l'argument résonant ϕ , en fonction du temps.

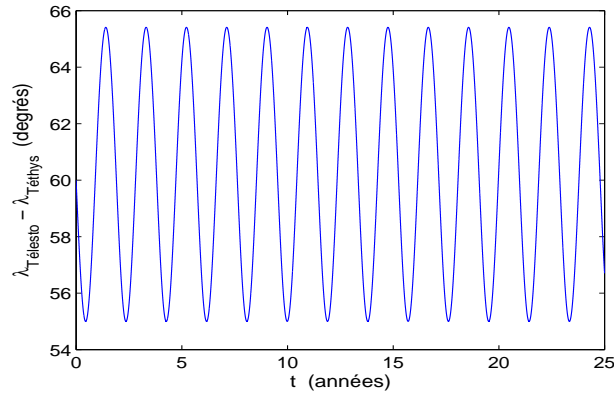


FIGURE 2.5 – Argument résonant ϕ ($= \lambda_{Telesto} - \lambda_{Tethys}$) (en degrés) en fonction du temps (en années).

La libration de l'angle ϕ varie entre 55 et 65.5° , avec une période égale à 1.9080 an. Comme dit précédemment, Télésto ne se situe pas exactement sur le point de Lagrange L_4 qui lui se situe à exactement à une distance angulaire égale à 60° de Téthys. Par contre Télésto oscille autour de

ce point de Lagrange et se situe à une distance angulaire de Téthys qui varie entre 55 et 65.5°.

Les périodes de libration des différents éléments représentés sur les précédents graphes sont résumées dans la Table suivante (2.2) :

TABLE 2.2 – Périodes du demi-grand axe, de l'excentricité et de l'inclinaison de Téthys et Télésto pour les conditions initiales de la Table 2.1, ainsi que la période de l'argument résonant.

		Téthys	Télésto
a	$T_1 =$	1.8862 jour	1.8847 jour
	$T_2 =$		1.9076 an
e	$T_1 =$	1.8885 jour	1.8885 jour
I	$T_1 =$	0.9423 jour	0.9423 jour
	$T_2 =$		1.908 an
ϕ	$T =$	1.9080 an	

Si on compare ces valeurs numériques avec les valeurs analytiques obtenues dans la Table 1.5, on remarque qu'elles sont fort semblables. Par contre, pour la petite période de libration de l'inclinaison, elles sont différentes. Mais cette période numérique est une harmonique de la période analytique ($0.9423 \text{ jour} \times 2 = 1.8847 \text{ jour}$).

2.2 Hélène

Utilisons maintenant l'intégrateur numérique avec Saturne, Dioné et Hélène. Les conditions initiales proviennent également du site du JPL ([17]) :

TABLE 2.3 – Conditions initiales pour l'intégration numérique de Dioné et Hélène. Celles-ci sont celles du 1^{er} janvier 2000 et sont données par rapport au plan de Laplace.

	Dioné	Hélène
a	377415 km	377444 km
e	0.0022 rad	0 rad
w	0°	0°
M	0°	60°
I	0.028°	0.213°
Ω	0°	0°
GM	73.1146 km ³ s ⁻²	0.00076 km ³ s ⁻²
$GM_{Saturne} = 37931208 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$		
$R_{Saturne} = 60330 \text{ km}$		
$J_{2Saturne} = 0.01629$		

Comme pour Télésto, on utilise $GM = 0$ pour Hélène car on a supposé que la masse était négligeable.

La Figure 2.6 représente le demi-grand axe de Dioné (en rouge) et celui de Hélène (en bleu), centré en zéro, en fonction du temps.

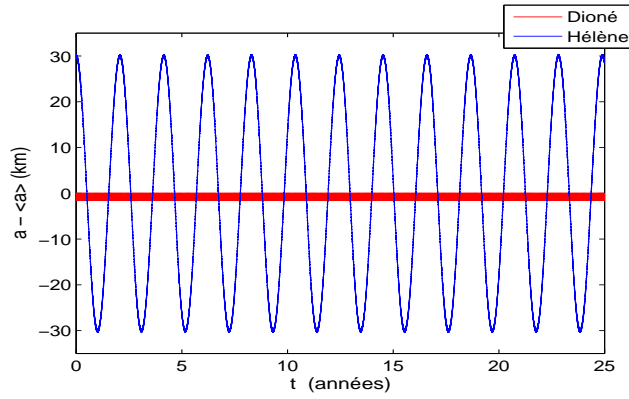


FIGURE 2.6 – Comparaison entre le demi-grand axe (en km) de Dioné et celui de Hélène, en fonction du temps (en années). La valeur moyenne $\langle a \rangle$ qu'on retire au demi-grand axe afin de centrer la courbe en zéro vaut $\langle a \rangle = 377415$ km.

Le demi-grand axe d'Hélène oscille avec une amplitude d'environ 30 km autour de la valeur du demi-grand axe de Dioné et une période de 2.0756 ans. Comme Télésto, Hélène ne se situe pas exactement sur le point de Lagrange L_4 de Dioné mais oscille autour en s'éloignant jusqu'à 30 km (dans la direction de Saturne). Le demi-grand axe a également une petite période de libration de 2.7394 jours qui est la même pour Hélène et Dioné.

Sur la Figure suivante (2.7), on peut observer l'excentricité de Dioné et de son Lagrangien Hélène en fonction du temps.

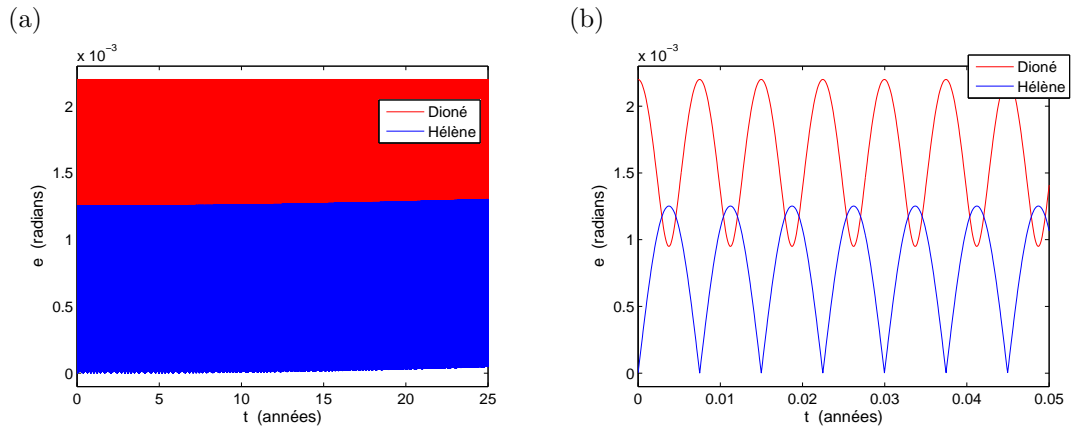


FIGURE 2.7 – (a) évolution de l'excentricité (en radians) de Dioné et Hélène en fonction du temps (en années). Le graphe en (b) est le même que en (a), mais sur une période de temps plus courte.

On remarque sur la Figure 2.7 (b) que Dioné et Hélène ont la même période. Cette période est de 2.7394 jours. Les excentricités de ces deux satellites ont également la même amplitude, qui est de 6.25×10^{-4} radian.

L'inclinaison est représentée sur la Figure 2.8 :

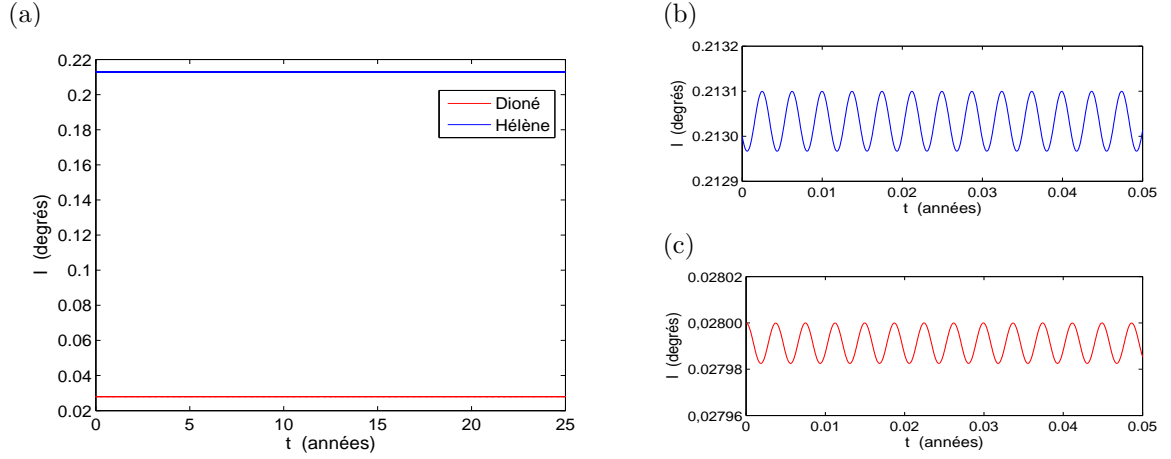


FIGURE 2.8 – (a) évolution de l'inclinaison (en radians) de Dioné et Hélène en fonction du temps (en années). Les graphes en (b) et (c) sont les inclinaisons d'Hélène et Dioné respectivement, séparés et où on a réduit l'échelle de temps.

La période de l'inclinaison d'Hélène est de 1.3685 jour et celle de Dioné est la même.

La Figure 2.9 représente la différence des longitudes moyennes des deux satellites, c'est-à-dire l'argument résonant ϕ .

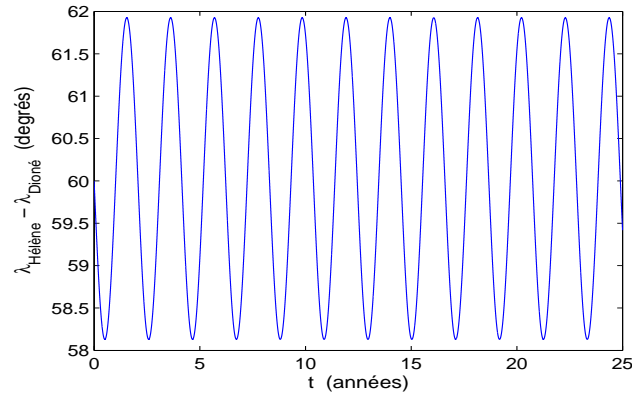


FIGURE 2.9 – Argument résonant ϕ ($\lambda_{Hélène} - \lambda_{Dioné}$) (en degrés) en fonction du temps (en années).

L'argument résonant ϕ oscille autour des 60° , avec une amplitude d'environ 2° . Cette amplitude est plus petite que pour Télésto car Hélène est plus proche du point de Lagrange L_4 que Télésto.

Les périodes de libration des différents éléments représentés sur les précédents graphes sont résumées dans la Table suivante (2.4) :

TABLE 2.4 – Périodes du demi-grand axe, de l'excentricité et de l'inclinaison de Dioné et Hélène pour les conditions initiales de la Table 2.3.

		Dioné	Hélène
a	$T_1 =$	2.7394 jours	2.7394 jours
	$T_2 =$		2.0756 ans
e	$T_1 =$	2.7357 jours	2.7357 jours
I	$T_1 =$	1.3685 jour	1.3685 jour
	$T_2 =$		2.0760 ans
ϕ	$T_1 =$	2.7211 jours	
	$T_2 =$	2.0754 ans	

Comme pour Téthys et Télésto, les valeurs numériques dans la Table ci-dessus sont semblables aux valeurs analytiques de la Table 1.5. Les valeurs numériques de l'inclinaison qui diffèrent sont en fait des harmoniques de la petite période de libration analytique ($1.3685 \text{ jour} \times 2 = 2.7370 \text{ jours}$).

L'analyse numérique confirme donc les valeurs trouvées analytiquement.

Ce chapitre est essentiellement basé sur les deux articles d'Helena Morais ([8] et [9]). Afin de reproduire les résultats de ces articles, on se base également sur l'article de Message (1966) [7] et le livre "Solar System Dynamics" [11].

À partir des équations du mouvement, ce chapitre crée un modèle pour le problème des trois corps, dont le troisième corps est un Lagrangien. Ensuite on ajoute des perturbations comme l'aplatissement du corps central ou l'ajout de plusieurs corps et on regarde comment évoluent les différents éléments orbitaux.

3.1 Les équations du mouvement

Dans le chapitre 1, nous avons représenté les 3 corps dans un repère inertiel comme suit :

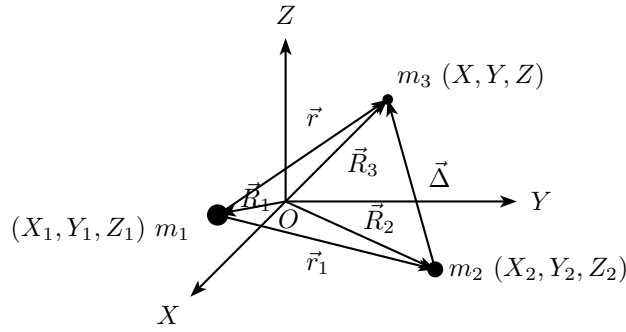


FIGURE 3.1 – Repère inertiel (O, X, Y, Z) et les 3 corps.

Les équations du mouvement des trois corps $(m_1, m_2$ et $m_3)$ par rapport au barycentre, dans un repère inertiel, et où on suppose que la masse du Lagrangien m_3 est nulle, sont toujours données par les équations de Newton :

$$\ddot{\vec{R}}_1 = \mathcal{G}m_2 \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} \quad (3.1)$$

$$\ddot{\vec{R}}_2 = \mathcal{G}m_1 \frac{-\vec{r}_1}{r_1^3} \quad (3.2)$$

$$\ddot{\vec{R}}_3 = \mathcal{G}m_1 \frac{-\vec{r}}{r^3} + \mathcal{G}m_2 \frac{\vec{\Delta}}{\Delta^3} \quad (3.3)$$

où

$$\vec{r} = \vec{R}_3 - \vec{R}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_1 = \vec{R}_2 - \vec{R}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{\Delta} = \vec{R}_2 - \vec{R}_3 = \vec{r}_1 - \vec{r} \quad (3.4)$$

et

$$r = \|\vec{r}\|, \quad r_1 = \|\vec{r}_1\| \quad \text{et} \quad \Delta = \|\vec{\Delta}\|.$$

À l'aide des équations (3.4), (3.1) et (3.2), on peut réécrire l'équation du mouvement :

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_1 &= \ddot{\vec{R}}_2 - \ddot{\vec{R}}_1 \\ &= \mathcal{G}m_1 \frac{-\vec{r}_1}{r_1^3} - \mathcal{G}m_2 \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} \\ &= -\mathcal{G}(m_1 + m_2) \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} \end{aligned}$$

qui est l'équation du problème des deux corps par rapport au corps central.

Ensuite utilisons les équations (3.4) et (3.3) pour réécrire l'équation du mouvement du satellite Lagrangien par rapport à Saturne :

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \ddot{\vec{R}}_3 - \ddot{\vec{R}}_1 \\ &= -\mathcal{G}m_1 \frac{\vec{r}}{r^3} + \mathcal{G}m_2 \frac{\vec{\Delta}}{\Delta^3} - \mathcal{G}m_2 \frac{\vec{r}_1}{r_1^3}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Posons

$$F_0 = -\mathcal{G}(m_1 + m_2) \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

et insérons F_0 dans l'équation (3.5) :

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= F_0 + \mathcal{G}m_2 \frac{\vec{r}}{r^3} + \mathcal{G}m_2 \frac{\vec{\Delta}}{\Delta^3} - \mathcal{G}m_2 \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} \\ &= F_0 + \mathcal{G}m_2 \left(\frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{\vec{\Delta}}{\Delta^3} - \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Finalement :

$$\ddot{\vec{r}} = F_0 + \nabla \mathcal{R} \quad (3.7)$$

où

$$\mathcal{R} = \mathcal{G}m_2 \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{1}{r} \right). \quad (3.8)$$

En effet, si on décompose \mathcal{R} et qu'on calcule le gradient de ces termes, alors on obtient bien les termes de l'équation (3.6) :

- $\nabla \left(\frac{1}{\Delta} \right) = \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|} \right) = \nabla \left(\frac{1}{\sqrt{(\vec{r}_1 - \vec{r})^2}} \right) = \frac{-1}{2 \left(\sqrt{(\vec{r}_1 - \vec{r})^2} \right)^3} 2 (\vec{r}_1 - \vec{r}) (-1)$
 $= \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|^3} = \frac{\vec{\Delta}}{\Delta^3},$
- $\nabla \left(\frac{-\vec{r} \cdot \vec{r}_1}{r_1^3} \right) = \frac{-\vec{r}_1}{r_1^3},$

$$\bullet \nabla \left(\frac{-1}{r} \right) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} \left(\frac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ \frac{d}{dy} \left(\frac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ \frac{d}{dz} \left(\frac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{2 \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^3} \\ \frac{2y}{2 \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^3} \\ \frac{2z}{2 \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^3} \end{pmatrix} = \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Le produit scalaire entre les deux vecteurs \vec{r} et \vec{r}_1 est donné par la formule suivante :

$$\vec{r} \cdot \vec{r}_1 = xx_1 + yy_1 + zz_1. \quad (3.9)$$

On peut réécrire \mathcal{R} en fonction de ses éléments orbitaux grâce aux relations ci-dessous :

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(f)}, \quad (3.10)$$

$$\begin{cases} x &= r (\cos \Omega \cos(\omega + f) - \sin \Omega \sin(\omega + f) \cos I) \\ y &= r (\sin \Omega \cos(\omega + f) + \cos \Omega \sin(\omega + f) \cos I) \\ z &= r (\sin(\omega + f) \sin I) \end{cases} \quad (3.11)$$

et des relations similaires pour r_1, x_1, y_1 et z_1 .

On peut exprimer $\cos f$ et $\sin f$ en fonction de l'anomalie moyenne M en utilisant un développement elliptique et en ne gardant que les termes du second ordre pour l'excentricité ($\mathcal{O}(e^3)$) provenant de [11] :

$$\begin{cases} \cos f &= \cos M + e (\cos(2M) - 1) + \frac{9e^2}{8} (\cos(3M) - \cos(M)) \\ \sin f &= \sin M + e \sin(2M) + \frac{e^2}{8} (9 \sin(3M) - 7 \sin M) \end{cases} \quad (3.12)$$

avec toujours des relations similaires pour $\cos f_1$ et $\sin f_1$.

Revenons à la formule de r (3.10). Comme l'excentricité est considérée comme petite, on peut appliquer un développement de Taylor d'ordre 2 centré en 0 pour l'excentricité afin de faire disparaître le dénominateur :

$$\begin{aligned} r &= \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(f)} \\ &= a(1 - e^2) (1 - e \cos f + e^2 \cos^2 f) \\ &= a(1 - e \cos f + e^2 \cos^2 f - e^2). \end{aligned}$$

Utilisons maintenant les formules (3.12) tout en gardant un ordre égal à 2 pour l'excentricité :

$$\begin{aligned} r &= a(1 - e(\cos M + e(\cos 2M - 1)) + e^2 \cos^2 M - e^2) \\ &= a(1 - e \cos M - e^2 \cos 2M + e^2 \cos^2 M) \\ &= a \left(1 - e \cos M + e^2 \left(-\cos 2M + \frac{1 + \cos 2M}{2} \right) \right) \\ &= a \left(1 - e \cos M + \frac{e^2}{2} (1 - \cos(2M)) \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Comme l'inclinaison I est petite, on peut poser :

$$\sin I \simeq I.$$

Ce qui donne, pour $\cos I$:

$$\cos I = \sqrt{1 - I^2}.$$

On peut utiliser un développement de Taylor d'ordre deux sur la racine carrée. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \cos I &= 1 - \frac{1}{2}I^2 + \mathcal{O}(I^3) \\ &\simeq 1 - \frac{1}{2}I^2 \end{aligned}$$

On aimerait exprimer la perturbation en fonction des angles λ , ϖ et Ω . Pour cela, on effectue les changements de variables suivants :

$$\begin{cases} M &= \lambda - \varpi \\ \omega &= \varpi - \Omega \end{cases}$$

On réécrit ensuite la perturbation \mathcal{R} en fonction de l'argument résonant ϕ :

$$\phi = \lambda - \lambda_1. \quad (3.14)$$

Après cela, on peut effectuer une moyennisation par rapport à l'angle rapide λ_1 :

$$\bar{\mathcal{R}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{R} d\lambda_1. \quad (3.15)$$

Ensuite, on réécrit le demi-grand axe a comme suit :

$$a = a_1 + \delta a, \quad (3.16)$$

c'est-à-dire, comme le demi-grand axe du satellite (m_2) auquel on ajoute une petite variation, et on néglige les termes d'ordre $\mathcal{O}\left(e^2 \frac{\delta a}{a_1}\right)$ et $\mathcal{O}\left(I^2 \frac{\delta a}{a_1}\right)$.

Finalement, on utilise un dernier changement de variables :

$$\begin{cases} k &= e \cos \varpi \\ h &= e \sin \varpi \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} q &= I \cos \Omega \\ p &= I \sin \Omega \end{cases} \quad (3.17)$$

avec des relations similaires pour k_1, h_1, p_1 et enfin q_1 . On peut également réécrire e et I comme suit :

$$e^2 = k^2 + h^2 \quad \text{et} \quad I^2 = p^2 + q^2. \quad (3.18)$$

Ce qui donne finalement :

$$\begin{cases} \cos \varpi &= \frac{k}{\sqrt{(k^2 + h^2)}} \\ \sin \varpi &= \frac{h}{\sqrt{(k^2 + h^2)}} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos \Omega &= \frac{q}{\sqrt{(p^2 + q^2)}} \\ \sin \Omega &= \frac{p}{\sqrt{(p^2 + q^2)}} \end{cases} \quad (3.19)$$

Lorsqu'une particule est située aux points de Lagrange L_4 ou L_5 , alors $a = a_1$ et $n = n_1$. On peut donc réécrire la troisième loi de Kepler comme suit :

$$n^2 a^3 = n_1^2 a_1^3 = \mathcal{G}(m_1 + m_2). \quad (3.20)$$

Définissons μ_1 par :

$$\mu_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Nous pouvons maintenant réécrire $\mathcal{G}m_2$ de la manière suivante :

$$\mathcal{G}m_2 = \mathcal{G}(m_1 + m_2) \frac{m_2}{m_1 + m_2} = n^2 a^3 \mu_1.$$

Appliquons tous ces changements de variables à (3.8). On obtient alors la perturbation suivante :

$$\boxed{\bar{\mathcal{R}}_{1:1} = n^2 a^2 \mu_1 \frac{a}{a_1} \left(\left[\left(\frac{a}{a_1} \right)^2 + 1 - 2 \left(\frac{a}{a_1} \right) \cos \phi \right]^{-1/2} - \left(\frac{a}{a_1} \right) \cos \phi - \frac{a_1}{a} + X \right)} \quad (3.21)$$

où

$$\begin{aligned} X = & (h^2 + k^2)g_1(\phi) + (hh_1 + kk_1)g_2(\phi) + (hk_1 - kh_1)g_3(\phi) \\ & + (p^2 + q^2)g_4(\phi) + (pp_1 + qq_1)g_5(\phi) + (pq_1 - qp_1)g_6(\phi) \end{aligned} \quad (3.22)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{lll} g_1(\phi) & = & \frac{\cos \phi}{2} - \frac{-9 + 4 \cos \phi + 5 \cos^2 \phi}{4(2 - 2 \cos \phi)^{5/2}} \\ g_2(\phi) & = & -\cos(2\phi) + \frac{-4 - 5 \cos \phi + 8 \cos^2 \phi + \cos^3 \phi}{2(2 - 2 \cos \phi)^{5/2}} \\ g_3(\phi) & = & -\sin(2\phi) + \sin \phi \left(\frac{-9 + 8 \cos \phi + \cos^2 \phi}{2(2 - 2 \cos \phi)^{5/2}} \right) \\ g_4(\phi) & = & \frac{\cos \phi}{4} - \frac{\cos \phi}{4(2 - 2 \cos \phi)^{3/2}} \\ g_5(\phi) & = & -\frac{\cos \phi}{2} + \frac{\cos \phi}{2(2 - 2 \cos \phi)^{3/2}} \\ g_6(\phi) & = & -\frac{\sin \phi}{2} + \frac{\sin \phi}{2(2 - 2 \cos \phi)^{3/2}} \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Dans ce résultat, nous avons ignoré les termes constants car la perturbation est définie à une constante près.

3.2 Comportement de δa et de ϕ

Nous allons maintenant utiliser les équations de Lagrange du mouvement perturbé pour décrire les effets sur δa et ϕ causés par la perturbation. Avant cela, nous avons besoin de définir un nouvel angle ϵ , qui représente la longitude moyenne de l'époque, c'est-à-dire, la longitude moyenne de m_1 à l'époque qui a été choisie pour origine du temps :

$$\lambda = nt + \epsilon.$$

Les équations de Lagrange pour a, ϵ et λ sont :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{a} & = & \frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} \\ \dot{\epsilon} & = & \frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} \\ \dot{\lambda} & = & \frac{d\lambda}{dt} = n + \frac{d\epsilon}{dt} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a}. \end{array} \right. \quad (3.24)$$

Et donc, par les équations (3.14) et (3.16) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{d \delta a}{dt} & = & \frac{d(a + a_1)}{dt} = \frac{da}{dt} + \underbrace{\frac{da_1}{dt}}_{=0} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \phi} \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}}_{=1} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \phi} \\ \frac{d \phi}{dt} & = & \frac{d(\lambda - \lambda_1)}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} - \underbrace{\frac{d\lambda_1}{dt}}_{=0} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} - n_1 + \underbrace{\frac{d\epsilon_1}{dt}}_{=0} = n - n_1 - \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \delta a} \underbrace{\frac{\partial \delta a}{\partial a}}_{=1} \\ & = & n - n_1 - \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \delta a}. \end{array} \right.$$

On peut réécrire n en fonction de n_1 en utilisant la troisième loi de Kepler (3.20) :

$$n = \sqrt{\frac{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}{a^3}} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}{(a_1 + \delta a)^3}} = \sqrt{\left(\frac{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}{a_1^3} \right) \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{\delta a}{a_1} \right)^3} \right)} = n_1 \left(1 + \frac{\delta a}{a_1} \right)^{-3/2}$$

et après un développement de Taylor d'ordre 1 pour $\delta a/a_1$ on obtient finalement

$$n \simeq n_1 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\delta a}{a_1} \right). \quad (3.25)$$

On peut montrer que

$$\frac{\delta a}{a_1} \simeq \sqrt{\mu_1}. \quad (3.26)$$

En remplaçant la perturbation \mathcal{R} par son équation (3.8) dans les équations de Lagrange, on obtient :

$$\begin{aligned}
\delta\dot{a} &= \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \phi} \\
&= \frac{2}{na} n^2 a^2 \mu_1 \frac{a}{a_1} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\left[\left(\frac{a}{a_1} \right)^2 + 1 - 2 \left(\frac{a}{a_1} \right) \cos \phi \right]^{-1/2} - \left(\frac{a}{a_1} \right) \cos \phi - \frac{a_1}{a} + X \right) \\
&= 2n_1 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\delta a}{a_1} \right) \mu_1 \frac{1}{a_1} a_1^2 \left(1 + \frac{\delta a}{a_1} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\left[\left(1 + \frac{\delta a}{a_1} \right)^2 + 1 - 2 \left(1 + \frac{\delta a}{a_1} \right) \cos \phi \right]^{-1/2} \right. \\
&\quad \left. - \left(1 + \frac{\delta a}{a_1} \right) \cos \phi \right) + \mathcal{O}(\mu_1 n_1 e^2, \mu_1 n_1 I^2)
\end{aligned}$$

car $\frac{a_1}{a}$ est indépendant de ϕ et $\frac{\partial X}{\partial \phi}$ est de l'ordre de $\mathcal{O}(\mu_1 n_1 e^2, \mu_1 n_1 I^2)$. Donc,

$$\begin{aligned}
\delta\dot{a} &= 2n_1 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\delta a}{a_1} \right) \mu_1 a_1 \left(1 + 2 \frac{\delta a}{a_1} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\left[1 + 2 \frac{\delta a}{a_1} + 1 - 2 \left(1 + \frac{\delta a}{a_1} \right) \cos \phi \right]^{-1/2} \right. \\
&\quad \left. - \left(1 + \frac{\delta a}{a_1} \right) \cos \phi \right) \\
&= 2n_1 \mu_1 a_1 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\delta a}{a_1} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\left[2 \left(1 + \frac{\delta a}{a_1} \right) (1 - \cos \phi) \right]^{-1/2} - \left(1 + \frac{\delta a}{a_1} \right) \cos \phi \right) \\
&= 2n_1 \mu_1 a_1 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\delta a}{a_1} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos \phi)}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta a}{a_1} \right) - \left(1 + \frac{\delta a}{a_1} \right) \cos \phi \right).
\end{aligned}$$

Par l'éq. (3.26), $\mu_1 \frac{\delta a}{a_1} \simeq \mu_1^{3/2}$. Si on veut limiter l'équation à l'ordre 2 pour $\delta a/a_1$, alors on peut négliger ces termes, et donc obtenir :

$$\begin{aligned}
\delta\dot{a} &= 2n_1 \mu_1 a_1 \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\sqrt{2(1 - 1 + 2 \sin^2(\phi/2))}} - \cos \phi - 1 \right) + \mathcal{O}(\mu_1^{3/2} n_1) \\
&= 2n_1 \mu_1 a_1 \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{2|\sin(\phi/2)|} - 1 + 2 \sin^2 \frac{\phi}{2} \right) + \mathcal{O}(\mu_1^{3/2} n_1) \\
&= 2n_1 \mu_1 a_1 \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1 + 4|\sin^3(\phi/2)|}{2|\sin(\phi/2)|} \right) + \mathcal{O}(\mu_1^{3/2} n_1) \\
\dot{\phi} &= n - n_1 - \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} \\
&\stackrel{(3.25)}{=} n_1 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\delta a}{a_1} \right) - n_1 - \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} \\
&= -\frac{3}{2} \frac{\delta a}{a_1} n_1 + \mathcal{O}(\mu_1 n_1).
\end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$\boxed{\begin{cases} \delta\dot{a} &= 2\mu_1 n_1 a_1 \frac{\partial}{\partial\phi} \left(\frac{1+4|\sin^3(\phi/2)|}{2|\sin(\phi/2)|} \right) \\ \dot{\phi} &= -\frac{3}{2} \frac{\delta a}{a_1} n_1 \end{cases}} \quad (3.27)$$

Dérivons une deuxième fois cette dernière équation :

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \frac{d}{dt} \left(-\frac{3}{2} \frac{\delta a}{a_1} n_1 \right) \\ &= -\frac{3}{2} n_1 \frac{1}{a_1} \delta\dot{a} \\ &= -3 \mu_1 n_1^2 \frac{\partial}{\partial\phi} \left(\frac{1+4|\sin^3(\phi/2)|}{2|\sin(\phi/2)|} \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Afin de simplifier les notations, posons

$$f(\phi) = \frac{1+4|\sin^3(\phi/2)|}{2|\sin(\phi/2)|},$$

ou encore

$$f(X) = \frac{1+4X^3}{2X} \quad \text{avec} \quad X = \left| \sin \frac{\phi}{2} \right|.$$

Réécrivons l'équation (3.28) en y injectant f :

$$\ddot{\phi} = -3\mu_1 n_1^2 \frac{\partial f}{\partial\phi}.$$

Multiplions les deux côtés de l'égalité par $\dot{\phi}$

$$\begin{aligned} \dot{\phi} \ddot{\phi} &= -3\mu_1 n_1^2 \frac{\partial f}{\partial\phi} \dot{\phi} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \right) &= -3\mu_1 n_1^2 \frac{\partial f}{\partial\phi} \frac{\partial\phi}{\partial t} = -3\mu_1 n_1^2 \frac{df}{dt} \\ \Leftrightarrow 0 &= \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{6} \dot{\phi}^2 - \mu_1 n_1^2 f \right). \end{aligned}$$

Il y a une intégrale première :

$$E = -\frac{1}{6} \dot{\phi}^2 - \mu_1 n_1^2 f. \quad (3.29)$$

Regardons maintenant l'équilibre des équations différentielles (3.27) :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \delta\dot{a} &= 0 \\ \dot{\phi} &= 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 0 &= 2\mu_1 n_1 a_1 \frac{\partial f}{\partial\phi} \\ 0 &= -\frac{3}{2} \frac{\delta a}{a_1} n_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Grâce à la première équation, on peut dire qu'à l'équilibre, $\frac{\partial f}{\partial \phi} = 0$, et que $\delta a = 0$ par la deuxième équation.

Comme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \phi} &= \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1 + 4|\sin^3(\phi/2)|}{2|\sin(\phi/2)|} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{2\sqrt{\sin^2(\phi/2)}} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(2\sin^2 \frac{\phi}{2} \right) \\
&= -\frac{1}{8} \frac{\sin \phi}{|\sin^3(\phi/2)|} + \sin \phi \\
&= \sin \phi \left(-\frac{1}{8|\sin^3(\phi/2)|} + 1 \right), \tag{3.30}
\end{aligned}$$

alors

$$\sin \phi \left(-\frac{1}{8|\sin^3(\phi/2)|} + 1 \right) = 0.$$

Soit

$$\sin \phi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi = 0 + k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

mais cette solution est rejetée car il y a un dénominateur, soit

$$1 - \frac{1}{8|\sin^3(\phi/2)|} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left| \sin \frac{\phi}{2} \right| = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \phi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \phi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Les deux équilibres sont alors

$$\begin{cases} \delta a = 0 \\ \phi = \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \delta a = 0 \\ \phi = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

qui correspondent aux positions des points de Lagrange L_4 et L_5 respectivement.

Revenons à l'équation de l'Énergie (3.29) et remplaçons $\dot{\phi}$ par (3.27) :

$$\begin{aligned}
E &= -\frac{1}{6} \left(-\frac{3}{2} \frac{\delta a}{a_1} n_1 \right)^2 - \mu_1 n_1^2 f \\
&= -\frac{3}{8} n_1^2 \left(\frac{\delta a}{a_1} \right)^2 - \mu_1 n_1^2 f \\
\Leftrightarrow \frac{\delta a}{a_1} &= \pm \sqrt{-\frac{8}{3} \mu_1 f - \frac{8}{3} \frac{E}{n_1^2}}. \tag{3.31}
\end{aligned}$$

La condition d'existence de $\delta a/a_1$ est la suivante :

$$\begin{aligned}
-\frac{8}{3} \mu_1 f - \frac{8}{3} \frac{E}{n_1^2} &\geq 0 \\
\Leftrightarrow -f \mu_1 n_1^2 &\geq E
\end{aligned}$$

et à l'équilibre, c'est-à-dire, lorsque $\phi = \frac{\pi}{3}$, la condition devient

$$E \leq -\frac{3}{2}\mu_1 n_1^2. \quad (3.32)$$

Nous allons maintenant calculer les racines de l'équation (3.31). Ces racines correspondent à l'état $\dot{\phi} = 0$.

$$\begin{aligned} \sqrt{-\frac{8}{3}\mu_1 f - \frac{8}{3}\frac{E}{n_1^2}} &= 0 \\ \Leftrightarrow f &= \frac{-E}{\mu_1 n_1^2} \\ \Leftrightarrow \frac{1 + 4|\sin(\phi/2)|^3}{2|\sin(\phi/2)|} &= \frac{-E}{\mu_1 n_1^2}. \end{aligned}$$

Posons

$$X = \left| \sin \frac{\phi}{2} \right|.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{1 + 4X^3}{2X} &= \frac{-E}{\mu_1 n_1^2} \\ \Leftrightarrow 4X^3 + 2\left(\frac{-E}{\mu_1 n_1^2}\right)X + 1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Les racines de cette équation du troisième degré peuvent être calculées grâce à la méthode de Cardan. Le discriminant vaut

$$\rho = \frac{1}{16} + \frac{1}{54} \left(\frac{-E}{\mu_1 n_1^2} \right)^3.$$

Par la condition donnée en (3.32), le discriminant est négatif et les 3 racines sont réelles et valent ($k = 0, 1, 2$) :

$$X_k = 2 \sqrt{-\frac{1}{6} \left(\frac{E}{\mu_1 n_1^2} \right)} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{1}{8} \sqrt{\left(-6 \left(\frac{E}{\mu_1 n_1^2} \right)^{-1} \right)^3} \right) + \frac{2k\pi}{3} \right)$$

et donc

$$\phi = \begin{cases} 2 \arcsin(X_k) \\ 2\pi - 2 \arcsin(X_k) \end{cases} \quad (3.34)$$

Les racines définies par X_1 sont rejetées car elles ne font pas partie du domaine de définition de l'arcsin. Les racines définies par X_0 existent pour $-\frac{5}{2}\mu_1 n_1^2 < E < -\frac{3}{2}\mu_1 n_1^2$ et celles définies par X_2 , pour $E < -\frac{3}{2}\mu_1 n_1^2$. Ces valeurs sont définies par la fonction f qui vaut $\frac{3}{2}$ lorsque $\phi = \frac{\pi}{3}$ et vaut $\frac{5}{2}$ lorsque $\phi = \pi$.

La Fig. 3.2 représente les trajectoires décrites par l'équation (3.31) pour différentes valeurs de l'énergie. Lorsque $-\frac{5}{2}\mu_1 n_1^2 < E < -\frac{3}{2}\mu_1 n_1^2$, on a une orbite qui a la forme d'un têtard (tadpole),

qui varie entre deux angles : ϕ_{min} et ϕ_{max} . Lorsque $E = -\frac{5}{2}\mu_1 n_1^2$, on se trouve sur la séparatrice. L'orbite oscille alors entre ϕ_{min} et $\phi = \pi$. Et finalement, lorsque $E < -\frac{5}{2}\mu_1 n_1^2$, on a une orbite qui a la forme d'un fer à cheval (horseshoe) qui oscille entre ϕ_{min} et $-\phi_{min}$. Ces ϕ_{min} et ϕ_{max} sont déterminés par les racines calculées en (3.34).

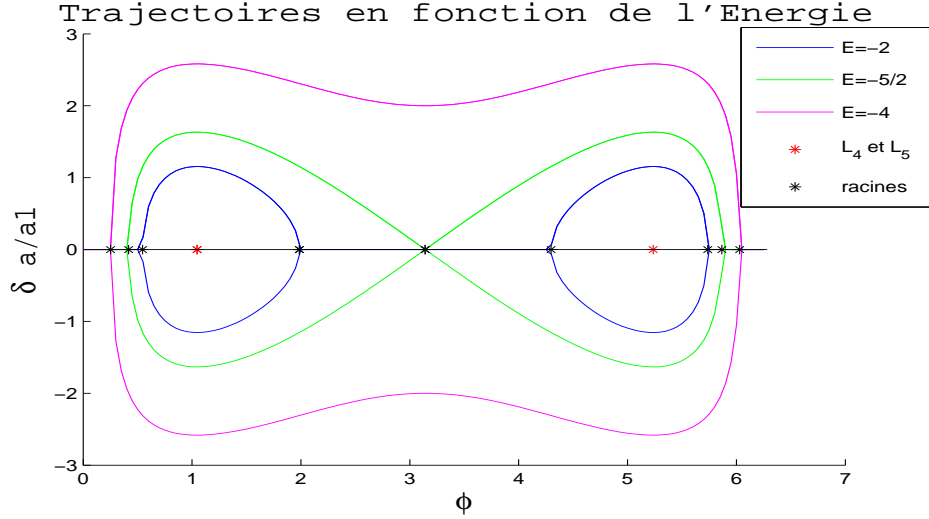


FIGURE 3.2 – Trajectoires pour différentes valeurs de E . En bleu, $-5/2 \mu_1 n_1^2 < E < -3/2 \mu_1 n_1^2$, en vert, $E = -5/2 \mu_1 n_1^2$ et en magenta, $E < -5/2 \mu_1 n_1^2$. Les étoiles rouges représentent L_4 à gauche et L_5 à droite. Finalement les étoiles noires représentent les racines de l'éq. (3.31).

Calculons l'angle ϕ_{min} qui correspond à la séparatrice. Nous savons que $\phi_{max} = \pi$. En utilisant cette information, on peut réécrire l'éq. (3.33) comme suit :

$$4X^3 - 5X + 1 = 0 \quad (3.35)$$

où les racines sont

$$\phi = \begin{cases} \pi \\ 2 \arcsin\left(\frac{-1 + \sqrt{2}}{2}\right) \simeq 23.9057^\circ \\ 2 \arcsin\left(\frac{-1 - \sqrt{2}}{2}\right) \end{cases} \quad (3.36)$$

L'angle minimum pour garder une orbite en forme de têtard est donc de 23.9057° .

Les trajectoires définies par l'éq. (3.31) ont une période de libration

$$T_{1:1} = \oint dt = \oint \frac{1}{\dot{\phi}} d\phi,$$

car

$$d\phi = \frac{d\phi}{dt} dt = \dot{\phi} dt. \quad (3.37)$$

Dans le cas d'une orbite en forme de têtard, comme le temps pour aller du point ϕ_{min} au point ϕ_{max} est égal au temps pour aller de ϕ_{max} à ϕ_{min} , on peut réécrire la période comme suit :

$$T_{1:1} = 2 \int_{\phi_{min}}^{\phi_{max}} \frac{1}{\dot{\phi}} d\phi,$$

et pour les orbites en forme de fer à cheval, comme la trajectoire est symétrique par rapport à l'axe Ox , la période de libration devient :

$$T_{1:1} = 4 \int_{\phi_{min}}^{\pi} \frac{1}{\dot{\phi}} d\phi,$$

Afin de calculer ces intégrales, utilisons la méthode du point milieu et introduisons un nouvel angle l qui définit la position de la particule par rapport à $\frac{\pi}{3}$, autrement dit, $\phi = \frac{\pi}{3} - l$. Cet angle l est représenté sur la Figure 3.3 :

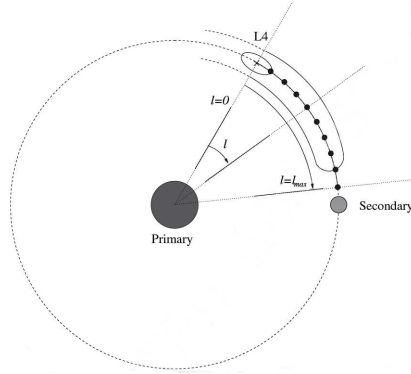


FIGURE 3.3 – Représentation de l'angle l . Source : Christou 2007 [1].

La valeur de l lorsqu'on se situe sur la séparatrice est $l_c = 0.63$ radian. La période de libration pour une orbite en forme de têtard à alors l'allure décrite sur la Fig. 3.4 lorsqu'on fait varier ϕ de 60° à $23,9^\circ$, ce qui correspond à faire varier l de 0 à 0.63 radian, et pour une orbite en forme de fer à cheval lorsque $l > 0.63$. Lorsque $l = 0.63$, c'est-à-dire, lorsque qu'on se situe sur la séparatrice, la période coorbitale $T_{1:1}$ à une singularité logarithmique.

La valeur maximale de $|\delta a/a_1|$ apparaît lorsque $\phi = \pm\pi/3$ et vaut

$$a_0 = \sqrt{\frac{8}{3}\mu_1 \left(f \left(\left| \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{l}{2} \right) \right| \right) \right)}.$$

Cette valeur de a_0 en fonction de l est représentée sur la Figure 3.5. Plus on s'éloigne de l'équilibre, plus a_0 augmente.

Finalement, l'évolution de l'Énergie E en fonction de l est représentée sur la Figure 3.6. Plus on s'éloigne de l'équilibre, plus l'Énergie augmente dans les négatifs.

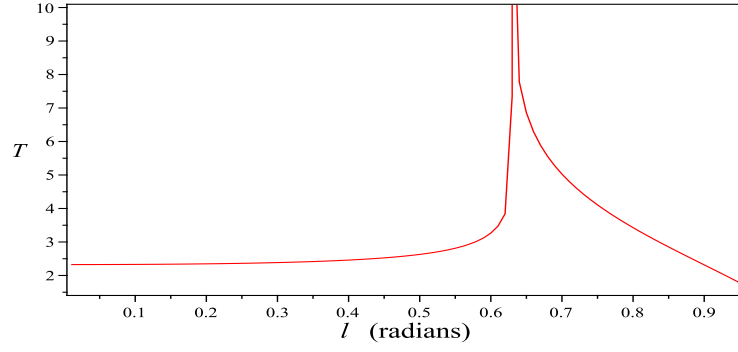


FIGURE 3.4 – Évolution de la période de libration des orbites en forme de têtard pour l allant de 0 à 0.63 (ϕ allant de 60° à 23.9°) ainsi que pour les orbites en forme de fer à cheval pour $l > 0.63$.

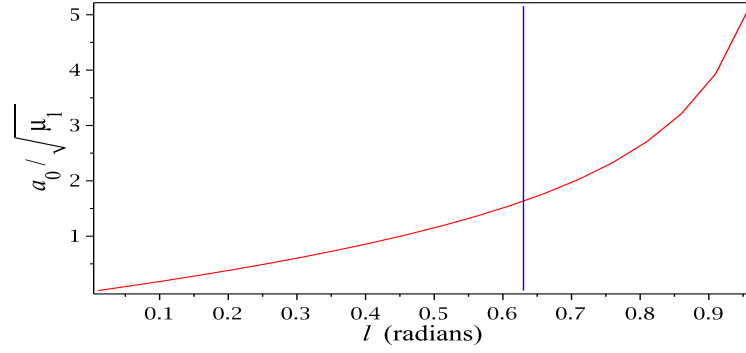


FIGURE 3.5 – Évolution de a_0 (divisé par $\sqrt{\mu_1}$) (en km) en fonction du l (en radian) (en rouge). La ligne bleue représente la valeur de l lorsqu'on se situe sur la séparatrice.

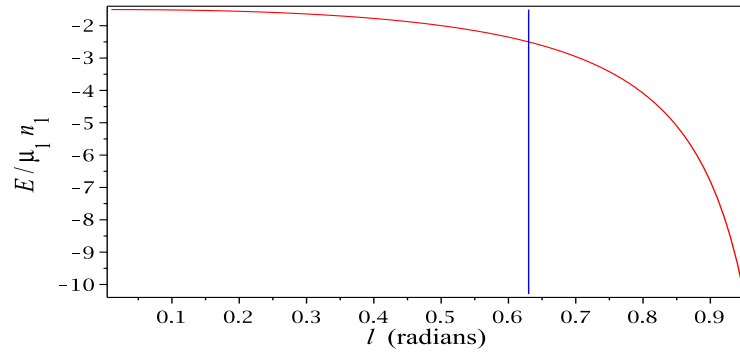


FIGURE 3.6 – Évolution de l'Énergie E (divisée par $\mu_1 n_1$) en fonction du l (en radian) (en rouge). La ligne bleue représente la valeur de l lorsqu'on se situe sur la séparatrice.

3.3 Solution séculaire

L'angle ϕ varie beaucoup plus rapidement que l'excentricité e ou l'inclinaison I . On peut donc effectuer une moyennisation de la perturbation \mathcal{R} par rapport à l'angle ϕ sur une période $T_{1,1}$.

On définit z par

$$z = e e^{i\varpi} \quad (3.38)$$

qui peut être réécrit sous forme cartésienne comme suit :

$$z = e (\cos \varpi + i \sin \varpi)$$

et grâce aux équations définies en (3.17),

$$z = k + ih \quad (3.39)$$

avec toujours une définition similaire pour z_1 .

Si on dérive l'équation (3.38), on obtient

$$\dot{z} = \dot{e} e^{i\varpi} + e i \dot{\varpi} e^{i\varpi}. \quad (3.40)$$

Les équations de Lagrange de \dot{e} et $\dot{\varpi}$ sont définies par

$$\begin{cases} \dot{e} &= -\frac{1}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi} \\ \dot{\varpi} &= \frac{1}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} \end{cases} \quad (3.41)$$

où on peut réécrire

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi} &= \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \varpi} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial \varpi} \\ &\stackrel{(3.17)}{=} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial k} (-e \sin \varpi) + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial h} (e \cos \varpi) \\ &= -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial k} h + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial h} k \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} &= \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial e} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial e} \\ &\stackrel{(3.17)}{=} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial k} (\cos \varpi) + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial h} (\sin \varpi) \\ &= \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial k} \frac{k}{e} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial h} \frac{h}{e}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

En utilisant les équations (3.41), (3.42) et (3.43) dans (3.40), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -\frac{1}{na^2 e} \left(-\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial k} h + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial h} k \right) e^{i\varpi} + i e \frac{1}{na^2 e} \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial k} \frac{k}{e} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial h} \frac{h}{e} \right) e^{i\varpi} \\ &= \frac{1}{na^2 e} e^{i\varpi} \left(-\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial h} (k - ih) + i \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial k} (k - ih) \right) \\ &= \frac{1}{na^2 e} \frac{k + ih}{e} (k - ih) \left(-\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial h} + i \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial k} \right) \\ &\stackrel{(3.18)}{=} \frac{1}{na^2} \left(-\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial h} + i \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial k} \right). \end{aligned} \quad (3.44)$$

On définit également Z par

$$Z = I e^{i\Omega} \quad (3.45)$$

qui peut être réécrit sous forme cartésienne comme suit :

$$Z = q + ip \quad (3.46)$$

avec toujours une définition semblable pour Z_1 .

On peut raisonner de façon similaire pour trouver \dot{Z} en utilisant cette fois les équations de Lagrange de \dot{I} et $\dot{\Omega}$:

$$\begin{cases} \dot{I} &= -\frac{1}{na^2I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega} \\ \dot{\Omega} &= \frac{1}{na^2I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I} \end{cases}$$

On obtient alors

$$\dot{Z} = \frac{1}{na^2} \left(-\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p} + i \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q} \right). \quad (3.47)$$

Dans le cas d'une orbite en forme de têtard, la moyenne de, par exemple $g_1(\phi)$, est

$$\bar{g}_1(l) = \frac{2}{T_{1:1}} \int_{\phi_{min}(l)}^{\phi_{max}(l)} \frac{g_1(\phi)}{|\dot{\phi}|} d\phi, \quad (3.48)$$

et dans le cas d'une orbite en forme de fer à cheval,

$$\bar{g}_1(l) = \frac{2}{T_{1:1}} \int_{\phi_{min}(l)}^{\pi} \frac{g_1(\phi)}{|\dot{\phi}|} d\phi + \frac{2}{T_{1:1}} \int_{\pi}^{2\pi - \phi_{min}(l)} \frac{g_1(\phi)}{|\dot{\phi}|} d\phi.$$

Comme la fonction $g_1(\phi)$ est paire, on peut réécrire l'intégrale comme suit :

$$\bar{g}_1(l) = \frac{4}{T_{1:1}} \int_{\phi_{min}(l)}^{\pi(l)} \frac{g_1(\phi)}{|\dot{\phi}|} d\phi. \quad (3.49)$$

Les fonctions $\bar{g}_2(\phi)$, $\bar{g}_4(\phi)$ et $\bar{g}_5(\phi)$ sont également paires, elles ont donc des formules semblables pour la période d'orbites en forme de fer à cheval. Par contre, $\bar{g}_3(\phi)$ et $\bar{g}_6(\phi)$ sont impaires et donc, les orbites en forme de fer à cheval ont $\bar{g}_3(\phi) = 0$ et $\bar{g}_6(\phi) = 0$.

Développons l'éq. (3.44) à l'aide des éq. (3.21) et (3.22) :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{1}{na^2} \left(-\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial h} + i \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial k} \right) \\ &= \frac{1}{na^2} \left(n^2 a^2 \mu_1 \frac{a}{a_1} \right) (-[2h\bar{g}_1 + h_1\bar{g}_2 + k_1\bar{g}_3] + i[2k\bar{g}_1 + k_1\bar{g}_2 - h_1\bar{g}_3]) \\ &= n\mu_1 \frac{a}{a_1} i (2\bar{g}_1 z + \bar{g}_2 z_1 + i\bar{g}_3 z_1) \\ &\simeq n_1 \mu_1 i (2\bar{g}_1 z + \bar{g}_2 z_1 + i\bar{g}_3 z_1). \end{aligned} \quad (3.50)$$

car, comme dit précédemment, $z = k + ih$ et $z_1 = k_1 + ih_1$.

La solution de cette équation différentielle est :

$$\begin{aligned} z &= A e^{2i\bar{g}_1\mu_1 n_1 t} - \frac{(i\bar{g}_2 z_1 - \bar{g}_3 z_1)\mu_1 n_1}{2i\bar{g}_1\mu_1 n_1} \\ &= A e^{2i\bar{g}_1\mu_1 n_1 t} - \frac{\bar{g}_2 + i\bar{g}_3}{2\bar{g}_1} z_1 \end{aligned} \quad (3.51)$$

où A est une constante.

On peut réécrire le coefficient de la deuxième partie de l'éq. (3.51) sous forme exponentielle :

$$\begin{cases} -\frac{\bar{g}_2}{2\bar{g}_1} = c \cos b \\ -\frac{\bar{g}_3}{2\bar{g}_1} = c \sin b \end{cases} \quad \text{et donc} \quad -\frac{\bar{g}_2 + i\bar{g}_3}{2\bar{g}_1} = c e^{ib}$$

ce qui donne

$$c = \frac{\sqrt{\bar{g}_2^2 + \bar{g}_3^2}}{2\bar{g}_1} \quad (3.52)$$

et

$$b = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\bar{g}_3}{\bar{g}_2}\right) & \text{si } l < l_c \\ 0 & \text{si } l > l_c \end{cases} \quad (3.53)$$

On pose également

$$\gamma = 2\bar{g}_1\mu_1 n_1. \quad (3.54)$$

Les figures 3.7 et 3.8 représentent ces différents paramètres de la solution séculaire. On remarque que γ est plutôt constant lorsque l'orbite est en forme de têtard et augmente lorsque l'orbite est en forme de fer à cheval, que $c \simeq 1$ et que b décroît de 60° à 0° .

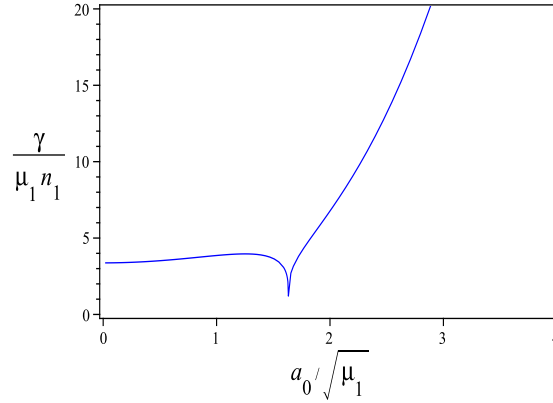


FIGURE 3.7 – Paramètre de la solution séculaire : $\gamma(l)/\mu_1 n_1$ en fonction de $a_0(l)/\sqrt{\mu_1}$.

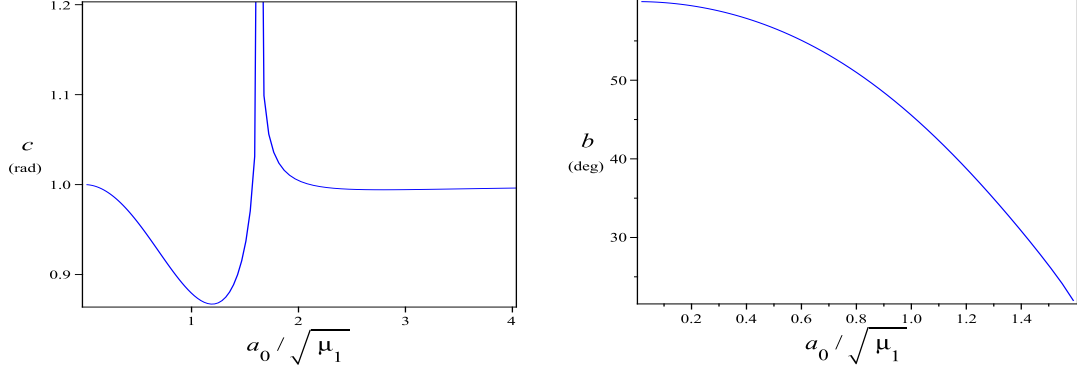


FIGURE 3.8 – Paramètres de la solution séculaire : $c(l)$ et $b(l)$ en fonction de $a_0(l)/\sqrt{\mu_1}$.

On obtient finalement la solution suivante :

$$z = Ae^{i\gamma t} + ce_1 e^{ib+i\varpi_1}. \quad (3.55)$$

La condition initiale de l'équation différentielle peut être écrite comme suit :

$$z(0) = e_0 e^{i\varpi_0}, \quad (3.56)$$

où e_0 et ϖ_0 sont l'excentricité et la longitude du péricentre au temps $t = 0$.

Si on remplace cette condition dans la solution de l'équation différentielle, on peut trouver la constante A :

$$\begin{aligned} z(0) &= A + ce_1 e^{ib+i\varpi_1} \\ \Leftrightarrow A &= e_0 e^{i\varpi_0} - ce_1 e^{ib+i\varpi_1}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Finalement, en substituant A dans l'équation (3.55),

$$z = (e_0 e^{i\varpi_0} - ce_1 e^{ib+i\varpi_1}) e^{i\gamma t} + ce_1 e^{ib+i\varpi_1} \quad (3.58)$$

L'allure de z est représentée sur les Fig. 3.9 et 3.10 avec pour conditions initiales les valeurs de la Table 3.1.

TABLE 3.1 – Conditions initiales pour la solution séculaire (excentricité). Celles-ci proviennent de l'article de Morais (1999) [8].

	m_1	m
a	1 km	$1 + \sqrt{\mu_1}$ km
e	0.047 rad	0 rad
ϖ	0°	0°
m	$4 \times 10^{-5} m_c$	0

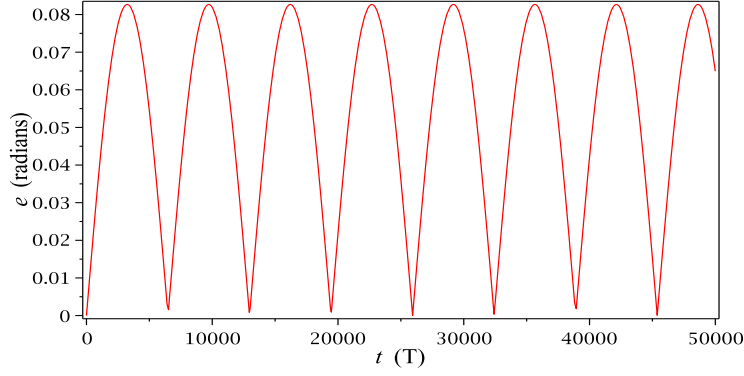


FIGURE 3.9 – Excentricité e en fonction du temps avec comme conditions initiales les valeurs de la Table 3.1. Le temps est exprimé en fonction de la période T .

L'amplitude de l'excentricité est de 0.04 radian. Si $a_0 = \sqrt{\mu_1}$, alors $l = 0.45$ et donc $c = 0.88$ et $b = 46^\circ$. La période vaut $T_\gamma = \frac{2\pi}{\gamma} = 6483T$.

La Figure 3.10 représente la partie réelle de z en fonction de sa partie imaginaire.

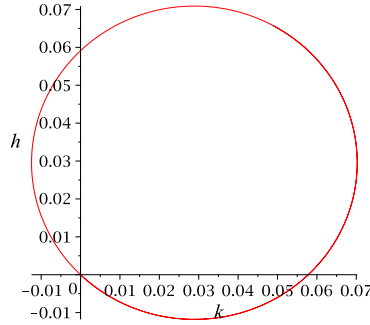


FIGURE 3.10 – Partie réelle de z (k) en fonction de sa partie imaginaire (h) avec comme conditions initiales les valeurs de la Table 3.1.

On peut interpréter cette courbe comme sur la Fig. 3.11. La solution séculaire définit un point dans le plan h - k . Ce point est défini par un vecteur de longueur e et un angle ϖ entre ce vecteur et l'axe k . Ce vecteur peut également être défini comme la somme de deux vecteurs.

Le premier vecteur va de l'origine au centre du cercle, qui est défini, dans ce cas-ci, par $ce_1e^{ib+i\varpi_1}$. Il a une longueur égale à $e_{\text{forcée}} = ce_1$ et forme un angle $\varpi_{\text{forcée}} = b + \varpi_1$ avec l'axe k . Ces valeurs de $e_{\text{forcée}}$ et de $\varpi_{\text{forcée}}$ dépendent du corps secondaire m_1 et sont appelées respectivement “excentricité forcée” et “longitude du péricentre forcée”.

Le deuxième vecteur démarre du centre du cercle et va jusqu'au point (h, k) . Sa longueur est égale à $e_{\text{propre}} = |A|$ et forme un angle $\varpi_{\text{propre}} = \gamma t$ avec l'axe k . Les valeurs de e_{propre} et ϖ_{propre} sont appelées “excentricité propre” et “longitude du péricentre propre” et proviennent des conditions initiales.

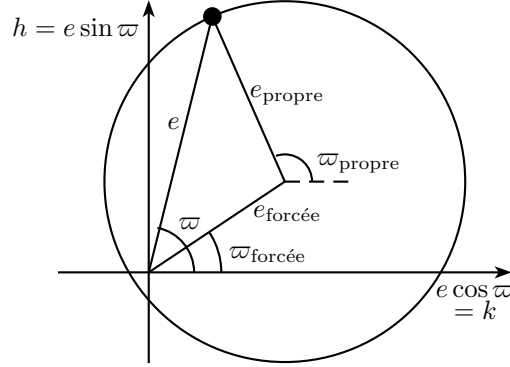


FIGURE 3.11 – Relations géométriques entre l'excentricité, l'excentricité forcée et propre ainsi que pour les longitudes du péricentre (dans le cas $e_{\text{propre}} > e_{\text{forcée}}$).

Dans les équations (3.23), on remarque que

$$2g_4(\phi) = -g_5(\phi), \quad (3.59)$$

et on sait déjà que $\bar{g}_6 = 0$ pour les orbites en forme de fer à cheval. C'est également valable pour les orbites en forme de têtard. En effet :

$$\begin{aligned} g_6(\phi) &= \frac{\sin \phi}{2} \left(-1 + \frac{1}{(2 - 2 \cos \phi)^{3/2}} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sin \phi \left(1 - \frac{1}{(2 - 2 \cos \phi)^{3/2}} \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} -\frac{1}{2} \sin \phi \left(1 - \frac{1}{8 \sin^3(\phi/2)} \right) \\ &= \frac{d}{d\phi} \left(-\frac{1}{2} f(\phi) \right). \end{aligned} \quad (3.60)$$

où la troisième égalité $(*)$ est issue de l'équation suivante :

$$\sin \frac{\phi}{2} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\phi}{2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} \cos \phi + \frac{1}{2} \right)} = \frac{1}{2} \sqrt{(2 - 2 \cos \phi)}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \bar{g}_6(l) &= \int_{\phi_{\min}(l)}^{\phi_{\max}(l)} \frac{g_6(\phi)}{|\dot{\phi}|} d\phi \\ &= \int_{\phi_{\min}(l)}^{\phi_{\max}(l)} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{-f(\phi)}{2} \right) \frac{1}{|\dot{\phi}|} d\phi \\ &= \int_{\phi_{\min}(l)}^{\phi_{\max}(l)} \frac{-df(\phi)}{2|\dot{\phi}|}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Revenons à l'éq. de l'énergie (3.29) et isolons f :

$$E = -\frac{1}{6}\dot{\phi}^2 - \mu_1 n_1^2 f(\phi) \quad \Leftrightarrow \quad f(\phi) = \frac{1}{\mu_1 n_1^2} \left(-\frac{1}{6}\dot{\phi}^2 - E \right).$$

Et donc, en remplaçant f dans l'éq. (3.61), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d(-f(\phi))}{2} &= d \left(\frac{1}{12\mu_1 n_1^2} \dot{\phi}^2 + \frac{E}{2\mu_1 n_1^2} \right) \\ &= \frac{1}{12\mu_1 n_1^2} 2\dot{\phi} d\dot{\phi} \\ &= \frac{1}{6\mu_1 n_1^2} \dot{\phi} d\dot{\phi}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

En substituant (3.62) dans (3.61), on obtient finalement

$$\begin{aligned} \bar{g}_6(l) &= \int_{\phi_{min}(l)}^{\phi_{max}(l)} \frac{1}{6\mu_1 n_1^2} \frac{\dot{\phi}}{\dot{\phi}} d\dot{\phi} \\ &= \frac{\dot{\phi}(\phi_{max}) - \dot{\phi}(\phi_{min})}{6\mu_1 n_1^2} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.63)$$

car $\dot{\phi}$ s'annule en ϕ_{max} et ϕ_{min} .

Développons maintenant l'éq. (3.47) de façon similaire :

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= \frac{1}{na^2} \left(-\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p} + i \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q} \right) \\ &= \frac{1}{na^2} \left(n^2 a^2 \mu_1 \frac{a}{a_1} \right) (-[2p\bar{g}_1 + p_1\bar{g}_2 + q_1\bar{g}_3] + i[2q\bar{g}_4 + q_1\bar{g}_5 - p_1\bar{g}_6]) \\ &\simeq \mu_1 n_1 i (2\bar{g}_4 Z + \bar{g}_5 Z_1 + i\bar{g}_6 Z_1). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Grâce aux équations (3.59) et (3.63), on peut simplifier (3.64) et obtenir finalement :

$$\dot{Z} = \mu_1 n_1 i (-\bar{g}_5 Z + \bar{g}_5 Z_1). \quad (3.65)$$

La solution de cette équation différentielle est

$$\begin{aligned} Z &= B e^{-i\bar{g}_5 \mu_1 n_1 t} - \frac{\bar{g}_5 \mu_1 n_1 Z_1}{-\bar{g}_5 \mu_1 n_1} \\ &= B e^{-i\bar{g}_5 \mu_1 n_1 t} + Z_1. \end{aligned} \quad (3.66)$$

On pose

$$\Gamma = -\bar{g}_5 \mu_1 n_1.$$

Ce dernier paramètre de la solution séculaire est représenté sur la Fig. 3.12. On remarque que Γ est négatif et décroît.

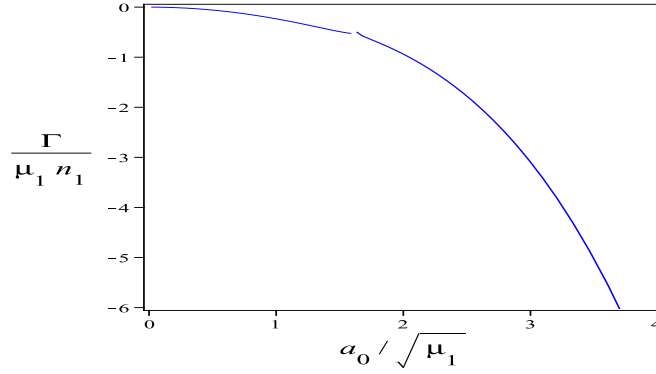


FIGURE 3.12 – Paramètre de la solution séculaire : $\Gamma(l)/\mu_1 n_1$ en fonction de $a_0(l)/\sqrt{\mu_1}$.

On utilise ensuite

$$Z = ie^{i\Omega}, \quad Z_1 = I_1 e^{i\Omega_1}, \quad (3.67)$$

pour réécrire (3.66) comme suit :

$$Z = B e^{i\Gamma t} + I_1 e^{i\Omega_1}, \quad (3.68)$$

où B est une constante.

Utilisons maintenant la condition initiale suivante afin de calculer B :

$$Z(0) = I_0 e^{i\Omega_0}, \quad (3.69)$$

où I_0 et Ω_0 sont l'inclinaison et la longitude du nœud ascendant au temps $t = 0$.

Si on utilise la condition initiale dans (3.66), alors on peut trouver B :

$$\begin{aligned} Z(0) &= B + I_1 e^{i\Omega_1} \\ \Leftrightarrow B &= I_0 e^{i\Omega_0} - I_1 e^{i\Omega_1}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Finalement

$$Z = (I_0 e^{i\Omega_0} - I_1 e^{i\Omega_1}) e^{i\Gamma t} + I_1 e^{i\Omega_1} \quad (3.71)$$

L'allure de Z est représentée sur les Fig. 3.13 et 3.14 avec les valeurs initiales suivantes (Table 3.2) :

TABLE 3.2 – Conditions initiales pour la solution séculaire (inclinaison) ([8]).

	m_1	m
a	1 km	$1 + \sqrt{\mu_1}$ km
I	0.8°	2°
Ω	0°	0°
m	$4 \times 10^{-5} m_c$	0

L'amplitude de l'inclinaison est de 0.8° . La période vaut $T_\Gamma = \frac{2\pi}{\Gamma} = 107684T$.

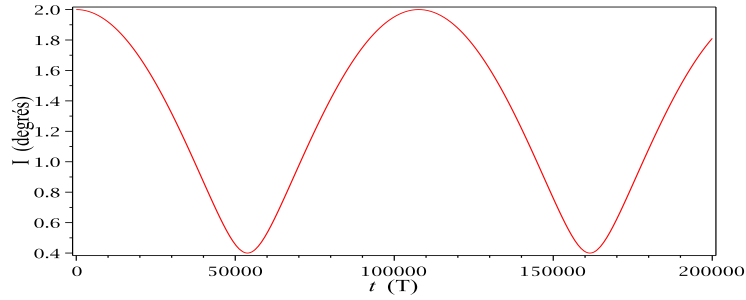


FIGURE 3.13 – Inclinaison I en fonction du temps avec comme conditions initiales les valeurs de la Table 3.2. Le temps est exprimé en fonction de la période T .

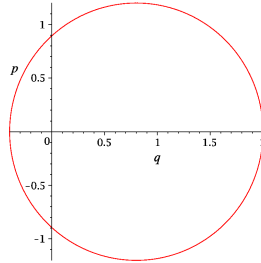


FIGURE 3.14 – Partie réelle de Z , c'est-à-dire q , en fonction de sa partie imaginaire, p , avec les conditions initiales provenant de la Table 3.2.

L'interprétation de la Fig. 3.14 est similaire à celle pour l'excentricité. Les valeurs $I_{\text{forcée}}$, $\Omega_{\text{forcée}}$, I_{propre} et Ω_{propre} représentent, respectivement, l'inclinaison et la longitude du nœud ascendant forcée et propre.

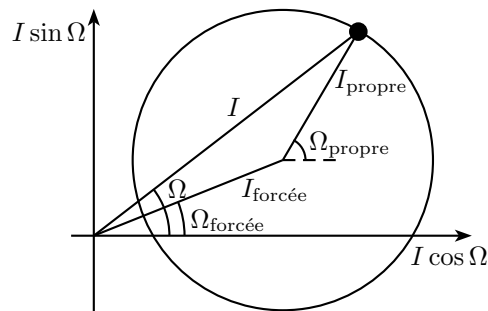


FIGURE 3.15 – Relations géométriques entre les différentes inclinaisons ainsi que les différentes longitudes du nœud ascendant (pour $I_{\text{propre}} < I_{\text{forcée}}$).

3.4 Intégration numérique

Afin de vérifier les résultats de la section 3.3, on utilise également l'intégrateur numérique RK4 sur le système dont les conditions initiales pour une orbite en forme de têtard sont reprises dans la Table 3.3 :

TABLE 3.3 – Conditions initiales pour l'intégration numérique. Celles-ci proviennent de l'article de Morais (1999) [8].

	m_1	m
a	1 km	$1 + \sqrt{\mu_1}$ km
e	0.047 rad	0 rad
w	0°	0°
M	0°	60°
I	0.8°	2°
Ω	0°	0°
m	$4 \times 10^{-5} m_c$	0

On obtient alors les graphes suivants (Fig 3.16 et 3.17). Les graphes (a) et (b) de la Figure 3.16 sont l'excentricité et l'inclinaison en fonction du temps respectivement. La Figure 3.17 (a) est l'excentricité en fonction de la différence des longitudes du péricentre et finalement la Figure 3.17 (b) est l'inclinaison en fonction de la différence des longitudes du nœud ascendant.

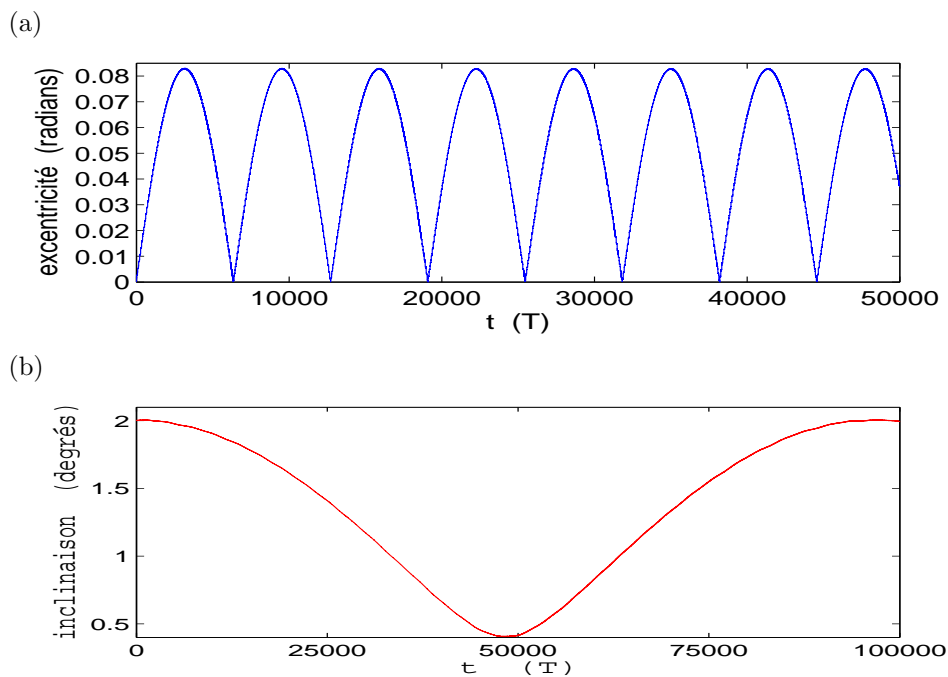


FIGURE 3.16 – Excentricité et inclinaison en fonction du temps obtenues par l'intégration numérique du système avec les conditions initiales de la Table 3.3.

La Table 3.4 compare les valeurs obtenues analytiquement et numériquement :

TABLE 3.4 – Comparaison des valeurs analytiques et numériques.

	Analytique	Numérique
e (rad)	0.0413	0.0415
T_γ (T)	6473	6350
I (deg)	0.8	0.8
T_Γ (T)	107684	96862

Les amplitudes sont proches, par contre les périodes ont des variations plus grandes. La période numérique de l'excentricité est plus petite de 123 ans et celle de l'inclinaison de 10822 ans.

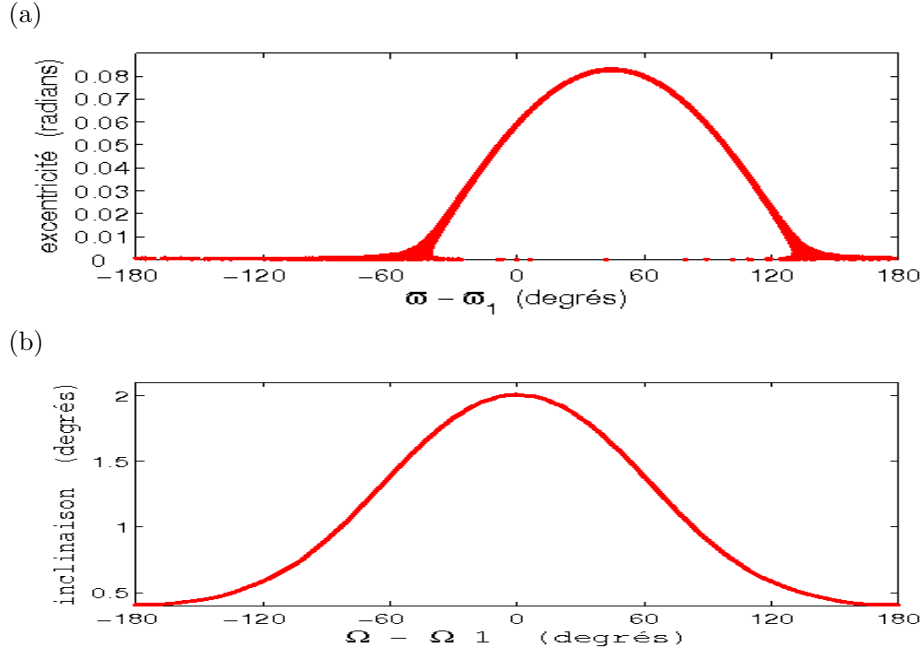


FIGURE 3.17 – Excentricité et inclinaison en fonction de la différence des longitudes du péricentre et des longitudes du noeuds ascendant respectivement, obtenues par l'intégration numérique du système dont les conditions initiales sont reprises dans la Table 3.3.

Les paramètres c et b peuvent être trouvés à partir du graphe de l'excentricité en fonction de la différence des longitudes du péricentre (Fig 3.17 (a)).

TABLE 3.5 – Comparaison des valeurs analytiques et numériques des paramètres c et b .

	Analytique	Numérique
c (rad)	0.88	0.88
b (deg)	46	45

Les valeurs numériques sont donc en accord avec la théorie séculaire (analytique) car elles sont semblables.

Si on compare les Figures 3.16 (a) et 3.18 qui sont respectivement l'excentricité et la différence des longitudes du péricentre en fonction du temps, on remarque que lorsque l'excentricité est nulle, la différence des longitudes du péricentre est mal définie. Cela explique les valeurs nulles de l'excentricité qui se situent à l'intérieur de la courbe sur la Figure 3.17 (a).

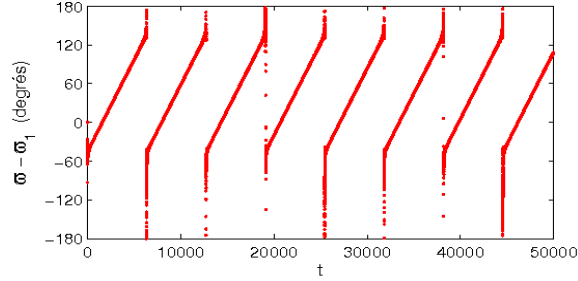
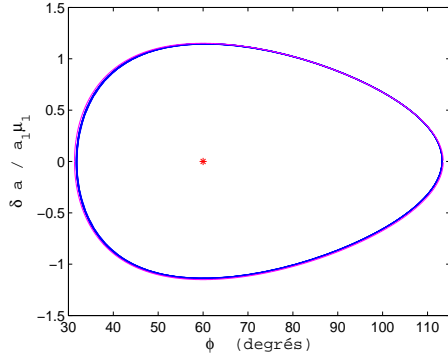


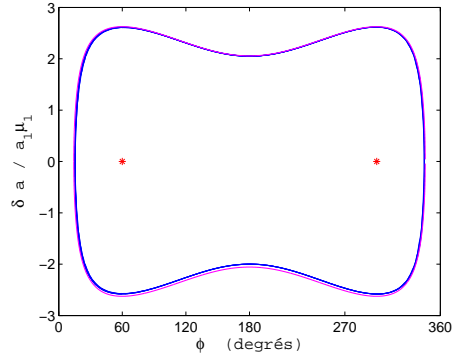
FIGURE 3.18 – Différence des longitudes du péricentre en fonction du temps.

La Figure 3.19 est une comparaison de $\delta a/a_1$ en fonction de ϕ entre le modèle analytique et le modèle numérique. Lorsqu'on a une orbite en forme de têtard, la courbe de $\delta a/a_1$ en fonction de ϕ a l'allure représentée sur le graphe (a). Lorsqu'on se situe sur la séparatrice, la courbe à l'allure du graphe (b) et lorsque l'orbite a la forme d'un fer à cheval, la courbe est celle représentée en (c). Pour le graphe (d), on a légèrement augmenté la valeur de l'Energie ($E = -2.51 \mu_1 n_1$) du modèle numérique afin de se situer sur la séparatrice, tout en gardant $E = -5/2 \mu_1 n_1$ pour la courbe analytique.

(a)



(c)



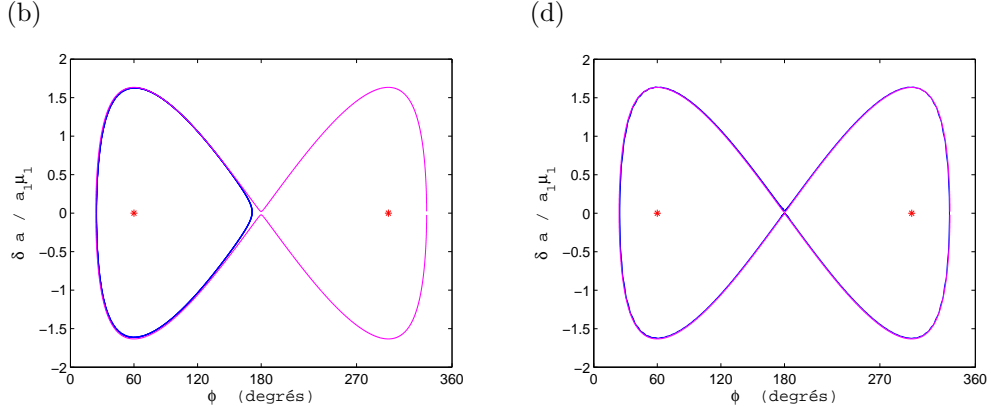


FIGURE 3.19 – Comparaison de $\delta a/a_1$ en fonction de ϕ entre le modèle analytique (magenta) et le modèle numérique (bleu) pour les mêmes valeurs de l'Énergie que précédemment : (a) $E = -2 \mu_1 n_1$, (b) $E = -5/2 \mu_1 n_1$, (c) $E = -4 \mu_1 n_1$ et le graphe en (d) a $E = -2.51 \mu_1 n_1$ pour la courbe numérique et $E = -5/2 \mu_1 n_1$ pour la courbe analytique.

Il faut donc légèrement plus d'Énergie pour que les orbites soient les mêmes.

3.5 L'effet dû à l'aplatissement de Saturne

Soient (r, ϕ, α) les coordonnées du satellite, où r est la distance entre le corps central et le satellite, ϕ est sa longitude et enfin α sa latitude. Le potentiel gravitationnel, dû à l'aplatissement du corps central, exercé sur le satellite est donné par la formule suivante [11] :

$$V = -\frac{Gm_1}{r} \left(1 - \sum_{i=2}^{\infty} J_i \left(\frac{R}{r} \right)^i P_i(\sin \alpha) \right), \quad (3.72)$$

où $P_i(\sin \alpha)$ est un polynôme de Legendre de degré i , R est le rayon équatorial du corps central et J_i est une constante liée à l'aplatissement du corps central.

La perturbation, de degré 2, est alors

$$\mathcal{R}_{obl} = -\frac{Gm_1}{r} \left(J_2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 P_2(\sin \alpha) \right), \quad (3.73)$$

où le polynôme de Legendre de degré 2 est défini par

$$P_2(\sin \alpha) = \frac{3}{2} \sin^2 \alpha - \frac{1}{2},$$

et

$$\sin \alpha = \sin I \sin(f + \omega).$$

Insérons cela dans l'équation (3.73) ainsi que la formule (3.10) pour exprimer r en fonction de ses éléments orbitaux. Utilisons également la troisième loi de Kepler pour le corps central

$$\mathcal{G}m_1 = n^2 a^3.$$

On obtient alors

$$\mathcal{R}_{obl} = -\frac{n^2 a^3}{a} \left(\frac{1 + e \cos f}{1 - e^2} \right) \left[J_2 \left(\frac{R}{a} \right)^2 \left(\frac{1 + e \cos f}{1 - e^2} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \sin^2 I \sin^2(f + \omega) - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (3.74)$$

Grâce aux formules définies en (3.12), on peut réexprimer $\sin(f + \omega)$ en fonction de M , tout en gardant un ordre inférieur ou égal à deux pour l'excentricité et l'inclinaison. Comme il y a déjà un terme d'ordre deux pour l'inclinaison ($\sin^2 I \simeq I^2$), alors on ne garde que les termes de degré zéro dans les formules (3.12). Cela donne :

$$\begin{aligned} \sin^2 I \sin^2(f + \omega) &= \sin^2 I (\sin^2 f \cos^2 \omega + \cos^2 f \sin^2 \omega + 2 \sin f \cos f \sin \omega \cos \omega) \\ &= \sin^2 I \left(\sin^2 M \cos^2 \omega + \cos^2 M \sin^2 \omega + \frac{1}{2} \sin 2M \sin 2\omega \right) \\ &= \sin^2 I \left(\left(\frac{1 - \cos 2M}{2} \right) \cos^2 \omega + \left(\frac{1 + \cos 2M}{2} \right) \sin^2 \omega + \frac{1}{2} \sin 2M \sin 2\omega \right) \\ &= \sin^2 I \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2M \cos 2\omega + \frac{1}{2} \sin 2M \sin 2\omega \right). \end{aligned} \quad (3.75)$$

Et après une moyennisation de (3.75) en λ ($M = \lambda - \varpi$) entre 0 et 2π , il ne reste plus que

$$\sin^2 I \sin^2(f + \omega) = \frac{\sin^2 I}{2}.$$

Si on réinsère cette dernière équation dans la perturbation, on obtient

$$\mathcal{R}_{obl} = -\frac{n^2 a^2}{2} J_2 \left(\frac{R}{a} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \sin^2 I - 1 \right) \left(\frac{1 + e \cos f}{1 - e^2} \right)^3. \quad (3.76)$$

Développons maintenant le dernier terme, toujours en utilisant les formules (3.12) ainsi qu'un développement de Taylor en e , car l'excentricité est considérée comme petite, afin de faire disparaître le dénominateur :

$$\begin{aligned} (1 + e \cos f)^3 (1 - e^2)^{-3} &= \left(1 + 3e \cos M + \frac{3}{2} e^2 (3 \cos 2M - 1) \right) (1 + 3e^2) \\ &= 1 + \frac{3}{2} e^2 + 3e \cos M + \frac{9}{2} e^2 \cos 2M. \end{aligned}$$

Et après une moyennisation en λ ,

$$(1 + e \cos f)^3 (1 - e^2)^{-3} = 1 + \frac{3}{2} e^2.$$

Finalement, la perturbation due à l'aplatissement du corps central est

$$\mathcal{R}_{obl} = \frac{n^2 a^2}{2} J_2 \left(\frac{R}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{3}{2} I^2 \right) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right),$$

ou encore

$$\boxed{\mathcal{R}_{obl} = \frac{n^2 a^2}{2} J_2 \left(\frac{R}{a} \right)^2 \left(1 + \frac{3}{2} e^2 - \frac{3}{2} I^2 \right)} \quad (3.77)$$

où on a utilisé l'approximation $\sin I \simeq I$ car l'inclinaison est considérée comme petite.

On pose ensuite

$$\beta = \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R}{a} \right)^2 n. \quad (3.78)$$

3.5.1 Comportement de δa et ϕ

Comme nous l'avons fait dans la section 3.2, nous allons appliquer les équations de Lagrange. Commençons par calculer $\dot{\lambda}$:

$$\dot{\lambda} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a},$$

où

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{1:1} + \mathcal{R}_{obl}. \quad (3.79)$$

Nous avons déjà $\dot{\lambda}$ pour $\mathcal{R}_{1:1}$. Il ne reste donc qu'à calculer :

$$\frac{\partial \mathcal{R}_{obl}}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{n^2 a^2}{2} J_2 \left(\frac{R}{a} \right)^2 \left(1 + \frac{3}{2} e^2 - \frac{3}{2} I^2 \right) \right).$$

Remarquons que n dépend de a via la troisième loi de Kepler. Il faut donc en tenir compte lors de la dérivation. Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_{obl}}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\mathcal{G}m_1}{a^3} \frac{a^2}{2} J_2 \left(\frac{R}{a} \right)^2 \left(1 + \frac{3}{2} e^2 - \frac{3}{2} I^2 \right) \right) \\ &= -3 \frac{\mathcal{G}m_1}{a^4} \frac{a^2}{2} J_2 \left(\frac{R}{a} \right)^2 \left(1 + \frac{3}{2} e^2 - \frac{3}{2} I^2 \right) \\ &= -3 \frac{n^2}{a} \frac{a^2}{2} J_2 \left(\frac{R}{a} \right)^2 \left(1 + \frac{3}{2} e^2 - \frac{3}{2} I^2 \right) \\ &= -\frac{3}{2} n^2 a J_2 \left(\frac{R}{a} \right)^2 \left(1 + \frac{3}{2} e^2 - \frac{3}{2} I^2 \right) \\ &= -\beta n a \left(1 + \frac{3}{2} e^2 - \frac{3}{2} I^2 \right). \end{aligned}$$

Et donc, à l'ordre 0 pour l'excentricité et l'inclinaison :

$$-\frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}_{obl}}{\partial a} \simeq 2\beta.$$

Finalement, en insérant $\dot{\phi}$ trouvé précédemment pour la perturbation $\mathcal{R}_{1:1}$, on obtient

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \dot{\lambda} - \dot{\lambda}_1 \\ &\simeq n + 2\beta - n_1 - 2\beta_1 \\ &\simeq -\frac{3}{2} \frac{\delta a}{a_1} n_1 + 2\beta - 2\beta_1 + \mathcal{O}(\mu_1 n_1). \end{aligned}$$

Utilisons la formule de β définie en (3.78) :

$$\begin{aligned}
2\beta - 2\beta_1 &= 2 \frac{3}{2} J_2 \left(n \left(\frac{R}{a} \right)^2 - n_1 \left(\frac{R}{a_1} \right)^2 \right) \\
&= 3J_2 \sqrt{\mathcal{G}m_1} \left(a^{-3/2} \left(\frac{R}{a} \right)^2 - a_1^{-3/2} \left(\frac{R}{a_1} \right)^2 \right) \\
&= 3J_2 \sqrt{\mathcal{G}m_1} \left(a_1^{-3/2} \left(1 + \frac{\delta a}{a_1} \right)^{-3/2} a_1^{-2} \left(\frac{R}{1 + \frac{\delta a}{a_1}} \right)^2 - a_1^{-3/2} \left(\frac{R}{a_1} \right)^2 \right) \\
&= 3J_2 \left(\frac{R}{a_1} \right)^2 \frac{\sqrt{\mathcal{G}m_1}}{a_1^{3/2}} \left(\left(1 + \frac{\delta a}{a_1} \right)^{-7/2} - 1 \right) \\
&= 3J_2 \left(\frac{R}{a_1} \right)^2 n_1 \left(1 - \frac{7}{2} \frac{\delta a}{a_1} - 1 \right) \\
&= -\frac{3}{2} \frac{\delta a}{a_1} n_1 \left(7J_2 \left(\frac{R}{a_1} \right)^2 \right).
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\dot{\phi} = -\frac{3}{2} \frac{\delta a}{a_1} n_1 \left(1 + 7J_2 \left(\frac{R}{a_1} \right)^2 \right)} \quad (3.80)$$

Comme la nouvelle perturbation ne dépend pas de ϕ , $\delta\dot{a}$ ne change pas.

Dérivons une deuxième fois (3.80) :

$$\ddot{\phi} = -\frac{3}{2} \frac{\delta\dot{a}}{a_1} n_1 \left(1 + 7J_2 \left(\frac{R}{a_1} \right)^2 \right). \quad (3.81)$$

Calculons l'équilibre des équations différentielles de $\dot{\phi}$ et $\delta\dot{a}$:

$$\begin{cases} \delta\dot{a} = 0 \\ \dot{\phi} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2\mu_1 n_1 a_1 \frac{df}{d\phi} \\ 0 = -\frac{3}{2} \frac{\delta a}{a_1} n_1 \left(1 + 7J_2 \left(\frac{R}{a_1} \right)^2 \right) \end{cases}$$

La deuxième équation nous permet de dire que $\delta a = 0$ car le terme entre parenthèses est constant, et la première équation, que $\frac{df}{d\phi} = 0$. Ces deux résultats sont les mêmes que pour le modèle de base. Les points d'équilibre ne changent donc pas et sont toujours les points de Lagrange L_4 et L_5 .

Revenons à l'équation de $\dot{\phi}$ (3.81), et remplaçons $\delta\dot{a}$ par son équation donnée en (3.27) :

$$\ddot{\phi} = -3\mu_1 n_1^2 \left(1 + 7J_2 \left(\frac{R}{a_1} \right)^2 \right) \frac{df(\phi)}{d\phi}. \quad (3.82)$$

L'équation (3.82) possède également une intégrale première. Utilisons la même méthode que précédemment afin de la trouver :

$$\ddot{\phi} = u \frac{df}{d\phi} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + uf \right) = 0, \quad (3.83)$$

où u cette fois vaut

$$u = -3\mu_1 n_1^2 \left(1 + 7J_2 \left(\frac{R}{a_1} \right)^2 \right). \quad (3.84)$$

L'intégrale première est donc définie par

$$E = -\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + uf \quad (3.85)$$

$$= -\frac{1}{6} \dot{\phi}^2 - \mu_1 n_1^2 \left(1 + 7J_2 \left(\frac{R}{a_1} \right)^2 \right) f. \quad (3.86)$$

Insérons maintenant l'équation de $\dot{\phi}$ dans l'équation de l'énergie. On obtient alors

$$\boxed{\frac{\delta a}{a_1} = \pm \sqrt{\frac{-8\mu_1 f}{3 \left(1 + 7J_2 \left(\frac{R}{a_1} \right)^2 \right)} - \frac{8E}{3n_1^2 \left(1 + 7J_2 \left(\frac{R}{a_1} \right)^2 \right)^2}} \quad (3.87)$$

Cherchons les racines de cette équation lorsque $\dot{\phi} = 0$, c'est-à-dire, lorsque $\delta a = 0$.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & -\frac{8}{3} \frac{\mu_1 f}{\left(1 + 7J_2 \left(\frac{R}{a_1} \right)^2 \right)} = \frac{8}{3} \frac{E}{n_1^2 \left(1 + 7J_2 \left(\frac{R}{a_1} \right)^2 \right)^2} \\ \Leftrightarrow \quad & -\mu_1 f = \frac{E}{n_1^2 \left(1 + 7J_2 \left(\frac{R}{a_1} \right)^2 \right)} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1 + 4X^3}{2X} = -\frac{E}{\mu_1 n_1^2 \left(1 + 7J_2 \left(\frac{R}{a_1} \right)^2 \right)} \\ \Leftrightarrow \quad & 4X^3 + 2k'X + 1 = 0 \end{aligned}$$

où

$$k' = \frac{E}{\mu_1 n_1^2 \left(1 + 7J_2 \left(\frac{R}{a_1} \right)^2 \right)}. \quad (3.88)$$

Nous allons maintenant utiliser la méthode de Cardan afin de trouver les racines. Le discriminant vaut

$$\rho = \frac{1}{16} + \frac{1}{54} \left(\frac{-E}{\mu_1 n_1^2} \left(1 + 7J_2 \left(\frac{R}{a_1} \right)^2 \right)^{-1} \right)^3.$$

Ce discriminant est négatif, il y a donc 3 racines réelles qui sont les suivantes ($k = 0, 1, 2$) :

$$X_k = 2\sqrt{-\frac{1}{6}\left(\frac{E}{\mu_1 n_1^2}\right)\left(1 + 7J_2\left(\frac{R}{a_1}\right)^2\right)^{-1}} \\ \times \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{1}{8}\left(-6\left(\frac{E}{\mu_1 n_1^2}\right)^{-1}\left(1 + 7J_2\left(\frac{R}{a_1}\right)^2\right)\right)^{3/2}\right) + \frac{2k\pi}{3}\right)$$

et donc

$$\phi = \begin{cases} 2\arcsin(X_k) \\ 2\pi - 2\arcsin(X_k) \end{cases} \quad (3.89)$$

Comme précédemment, les racines définies par X_1 sont rejetées car elles ne font pas partie du domaine de définition de l'arcsin. Les racines définies par X_0 existent pour

$$-\frac{5}{2}\mu_1 n_1^2\left(1 + 7J_2\left(\frac{R}{a_1}\right)^2\right) < E < -\frac{3}{2}\mu_1 n_1^2\left(1 + 7J_2\left(\frac{R}{a_1}\right)^2\right)$$

et celles définies par X_2 , pour

$$E < -\frac{3}{2}\mu_1 n_1^2\left(1 + 7J_2\left(\frac{R}{a_1}\right)^2\right).$$

3.5.2 Comparaison avec le modèle de base

La Figure 3.20 compare les courbes représentant $\delta a/a_1$ en fonction de ϕ du modèle sans aplatissement (bleu) et du modèle avec aplatissement (magenta). On remarque que pour un même niveau d'Energie, l'orbite due à l'aplatissement est plus petite. Il faut donc plus d'Energie pour avoir la même orbite que dans le modèle de base. Cette Energie supplémentaire vaut $1 + 7J_2(R/a)^2$. Sur la Fig. 3.20 (c), lorsqu'on se situe sur la séparatrice dans le modèle sans aplatissement, pour le même niveau d'Energie, l'orbite est toujours une orbite en forme de têtard dans le modèle avec aplatissement. Et lorsqu'on se situe sur la séparatrice dans le modèle avec aplatissement (Fig. 3.20 (d)), dans le modèle de base, l'orbite à la forme d'un fer à cheval.

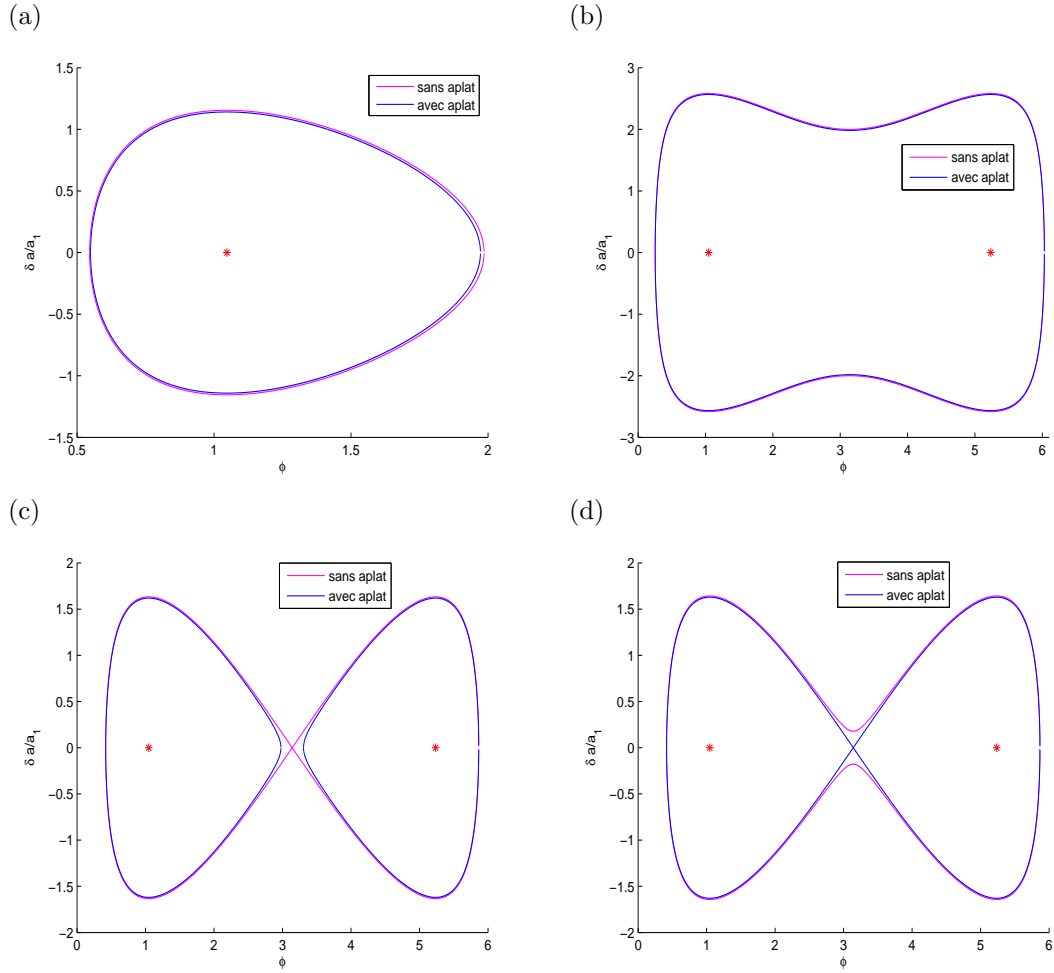


FIGURE 3.20 – Comparaison de $\delta a/a_1$ en fonction de ϕ pour le modèle sans aplatissement (magenta) et le modèle avec aplatissement (bleu) pour les mêmes valeurs de l'Energie que précédemment : (a) $E = -2$, (b) $E = -4$, (c) $E = -5/2$ et (d) $E = -(5/2)(1 + 7J_2(R/a)^2)$.

3.5.3 Solution séculaire

Nous pouvons écrire la solution séculaire pour la perturbation due à l'aplatissement du corps central, en utilisant les mêmes formules que précédemment ((3.44) et (3.47)) :

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= \frac{1}{na^2} \left(-\frac{\partial \mathcal{R}_{obl}}{\partial h} + i \frac{\partial \mathcal{R}_{obl}}{\partial k} \right) \\
&= \frac{1}{na^2} \left(-\frac{n^2 a^2}{2} J_2 \left(\frac{R}{a} \right)^2 \frac{3}{2} 2h + i \frac{n^2 a^2}{2} J_2 \left(\frac{R}{a} \right)^2 \frac{3}{2} 2k \right) \\
&= \frac{3}{2} n J_2 \left(\frac{R}{a} \right)^2 (-2h + i2k) \\
&= i\beta z.
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Et par un raisonnement similaire, on obtient pour \dot{Z} :

$$\dot{Z} = -i\beta Z. \tag{3.91}$$

On a alors

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= i\beta z_1 \\ \dot{Z}_1 &= -i\beta Z_1 \end{cases} \tag{3.92}$$

L'aplatissement du corps central a également une influence sur les corps secondaires, z_1 et Z_1 ne sont donc plus des constantes. Il faut donc les intégrer séparément et en tenir compte lors de la résolution des équations différentielles. Les solutions des équations (3.92) sont :

$$\begin{cases} z_1 &= B_1 e^{i\beta_1 t} \\ Z_1 &= B_2 e^{-i\beta_1 t} \end{cases} \tag{3.93}$$

Les équations différentielles qui décrivent l'évolution séculaire des Lagrangiens sont les équations obtenues dans la section 3.3 auxquelles on a ajouté les équations (3.90) et (3.91) :

$$\dot{z} = i((2\bar{g}_1 z + \bar{g}_2 z_1 + i\bar{g}_3 z_1) n_1 \mu_1 + \beta z) \tag{3.94}$$

$$\dot{Z} = i((- \bar{g}_5 Z + \bar{g}_5 Z_1) n_1 \mu_1 - \beta Z). \tag{3.95}$$

Les solutions homogènes de ces deux équations différentielles sont

$$\begin{cases} z_H &= A_1 e^{i(\gamma+\beta)t} \\ Z_H &= A_2 e^{i(\Gamma-\beta)t} \end{cases} \tag{3.96}$$

et les solutions particulières sont

$$\begin{cases} z_P &= C_1 e^{i\beta_1 t} \\ Z_P &= C_2 e^{-i\beta_1 t} \end{cases} \tag{3.97}$$

Si on insère ces dernières dans les équations (3.94) et (3.95), on obtient les constantes C_1 et C_2 suivantes

$$\begin{cases} C_1 &= \frac{\gamma c e^{ib}}{\beta_1 - \gamma - \beta} B_1 \\ C_2 &= \frac{\Gamma}{\beta_1 + \Gamma - \beta} B_2 \end{cases} \tag{3.98}$$

Et donc, comme $z = z_H + z_P$ et $Z = Z_H + Z_P$, on obtient finalement

$$\begin{cases} z &= A_1 e^{i(\gamma+\beta)t} - \frac{\gamma c}{\beta_1 - \gamma - \beta} e_1 e^{i(\beta_1 t + b + \varpi_1)} \\ Z &= A_2 e^{i(\Gamma-\beta)t} + \frac{\Gamma}{\beta_1 + \Gamma - \beta} I_1 e^{i(-\beta_1 t + \Omega_1)} \end{cases} \quad (3.99)$$

où les constantes A_1 et A_2 sont définies par les conditions initiales ($t = 0$) comme suit :

$$\begin{cases} z(0) &= e_0 e^{i\varpi_0} \\ Z(0) &= I_0 e^{i\Omega_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 &= e e^{i\varpi} + \frac{\gamma c}{\beta_1 - \gamma - \beta} e_1 e^{i(b + \varpi_1)} \\ A_2 &= I I^{i\Omega} - \frac{\Gamma}{\beta_1 + \Gamma - \beta} I_1 e^{i(\Omega_1)} \end{cases} \quad (3.100)$$

3.5.4 Comparaison avec le modèle de base

La Figure 3.21 compare (a) la partie imaginaire en fonction de la partie réelle de z et (b) l'excentricité, pour les modèles sans (bleu) et avec (magenta) aplatissement.

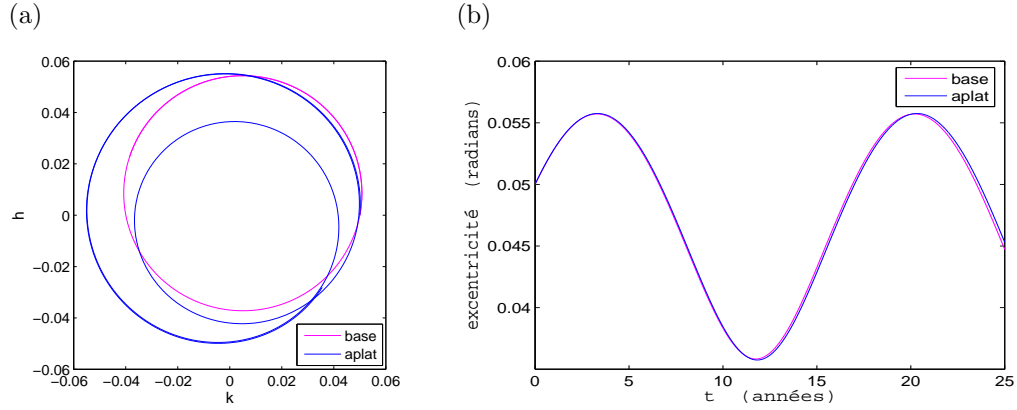


FIGURE 3.21 – Comparaison de l'excentricité e entre le modèle de base et le modèle avec aplatissement du corps central. (a) partie imaginaire h en fonction de la partie réelle k de z et (b) excentricité en fonction du temps, pour le modèle sans aplatissement (magenta) et le modèle avec aplatissement (bleu).

Comme dit précédemment, l'aplatissement agit également sur le corps secondaire. Le vecteur forcé n'est donc plus fixe comme dans le modèle de base. Celui-ci tourne également. C'est pourquoi on obtient un tel graphe sur la Figure 3.21 (a) ou la Figure 3.22 (a). Pour l'excentricité, la fréquence de rotation de ce vecteur forcé est plus lente que celle du vecteur propre (Table 3.6). Par contre, l'allure de l'excentricité en fonction du temps ne change pas.

TABLE 3.6 – Fréquences et Périodes du vecteur forcé et du vecteur propre pour l'excentricité lorsqu'on ajoute l'aplatissement du corps central.

	Fréquence (nb tours par an)	Période (années)
$e_{\text{forcé}}$	0.0594	16.829
e_{propre}	0.118	8.458

Pour l'inclinaison, les fréquences sont très proches. Les vecteurs tournent ensemble.

TABLE 3.7 – Fréquences et Périodes du vecteur forcé et du vecteur libre pour l'inclinaison lorsqu'on ajoute l'aplatissement du corps central.

	Fréquence (nb tours par an)	Période (années)
$I_{\text{forcé}}$	0.0594	16.829
I_{propre}	0.0607	16.474

L'allure de l'inclinaison, elle, change. En effet, l'aplatissement d'Uranus influence son amplitude ainsi que sa période de libration.

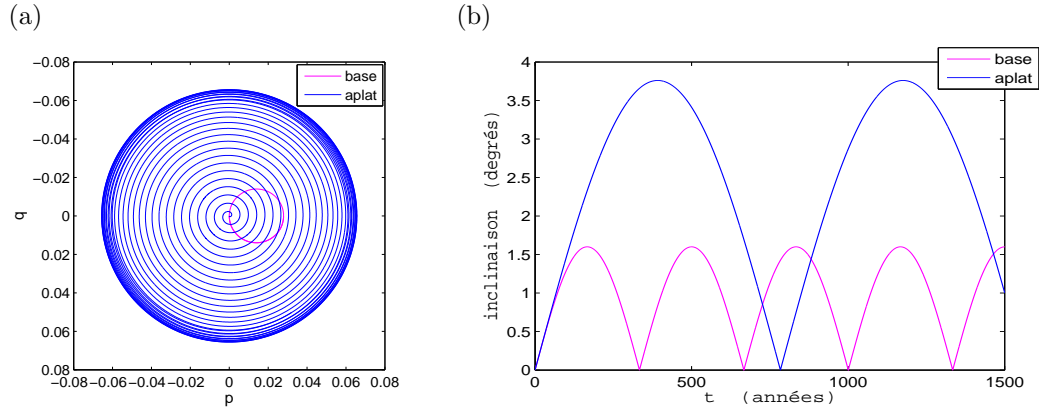


FIGURE 3.22 – Comparaison de l'inclinaison I entre le modèle de base et le modèle avec aplatissement du corps central. (a) partie imaginaire p en fonction de la partie réelle q de Z et (b) excentricité en fonction du temps, pour le modèle sans aplatissement (magenta) et le modèle avec aplatissement (bleu).

3.6 Perturbation due à l'ajout de N corps

On appelle le corps central m_c est les N corps qui orbitent autour de m_c sont appelés m_i ($i = 1, \dots, N$).

La fonction qui décrit la perturbation des $N - 1$ corps sur l'orbite de la masse m_k est la suivante [11] :

$$\bar{\mathcal{R}}_k = \frac{n_k a_k^2}{2} \left(A_{k,k} (h_k^2 + k_k^2) + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N A_{k,j} (h_k h_j + k_k k_j) + B_{k,k} (p_k^2 + q_k^2) + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N B_{k,j} (p_k p_j + q_k q_j) \right) \quad (3.101)$$

et les éléments des matrices A et B sont :

$$\begin{aligned} A_{k,k} &= -B_{k,k} = \frac{n_k}{4} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \frac{m_i}{m_c + m_k} \alpha_{k,i} \bar{\alpha}_{k,i} b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{k,i}) \\ A_{k,j} &= -\frac{n_k}{4} \frac{m_j}{m_c + m_k} \alpha_{k,j} \bar{\alpha}_{k,j} b_{3/2}^{(2)}(\alpha_{k,j}) \\ B_{k,j} &= \frac{n_k}{4} \frac{m_j}{m_c + m_k} \alpha_{k,j} \bar{\alpha}_{k,j} b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{k,j}) \end{aligned} \quad (3.102)$$

où $b_{3/2}^{(1)}(\alpha)$ et $b_{3/2}^{(2)}(\alpha)$ sont des coefficients de Laplace, définis par

$$b_s^{(j)}(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(j\psi)}{(1 - 2\alpha \cos \psi + \alpha^2)^s} d\psi \quad (3.103)$$

pour $s = i + \frac{i}{2}$ c'est-à-dire, $s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ et

$$\alpha_{k,j} = \begin{cases} a_j/a_k & \text{si } a_k > a_j \\ a_k/a_j & \text{si } a_k < a_j \end{cases} \quad \text{et} \quad \bar{\alpha}_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_k > a_j \\ a_k/a_j & \text{si } a_k < a_j \end{cases} \quad (3.104)$$

3.6.1 Solution séculaire pour N corps

Par les équations (3.44) et (3.47), on peut trouver \dot{z}_k et \dot{Z}_k :

$$\begin{aligned}
\dot{z}_k &= \frac{1}{n_k a_k^2} \left(-\frac{\partial \mathcal{R}_k}{\partial h_k} + i \frac{\partial \mathcal{R}_k}{\partial k_k} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(- \left(A_{k,k} 2h_k + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N A_{k,j} h_j \right) + i \left(A_{k,k} 2k_k + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N A_{k,j} k_j \right) \right) \\
&= i z_k A_{k,k} + i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N z_j A_{k,j} \\
&= i \sum_{j=1}^N z_j A_{k,j} \tag{3.105}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{Z}_k &= \frac{1}{n_k a_k^2} \left(-\frac{\partial \mathcal{R}_k}{\partial p_k} + i \frac{\partial \mathcal{R}_k}{\partial q_k} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(- \left(B_{k,k} 2p_k + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N B_{k,j} p_j \right) + i \left(B_{k,k} 2q_k + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N B_{k,j} q_j \right) \right) \\
&= i Z_k B_{k,k} + i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N Z_j B_{k,j} \\
&= i \sum_{j=1}^N Z_j B_{k,j}. \tag{3.106}
\end{aligned}$$

On définit les vecteurs \vec{z} et \vec{Z} par $\vec{z} = (z_1, z_2, \dots, z_N)^T$ et $\vec{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_N)^T$. On peut alors rassembler toutes les équations des z_k et Z_k sous forme d'une matrice :

$$\dot{\vec{z}} = i A \vec{z} \quad \text{et} \quad \dot{\vec{Z}} = i B \vec{Z}. \tag{3.107}$$

On peut intégrer ces équations différentielles et obtenir comme solution :

$$\begin{aligned}
\vec{z} &= \sum_{j=1}^N C_j \vec{e}_j e^{i g_j t}, \\
\vec{Z} &= \sum_{j=1}^N D_j \vec{I}_j e^{i f_j t}.
\end{aligned}$$

où g_j et f_j sont les valeurs propres des matrices A et B respectivement, et \vec{e}_j et \vec{I}_j sont leurs vecteurs propres associés. Si on réécrit la solution pour z_k et Z_k , cela donne :

$$\boxed{\vec{z}_k = \sum_{j=1}^N C_j e_{k,j} e^{i g_j t}} \tag{3.108}$$

et

$$\vec{Z}_k = \sum_{j=1}^N D_j I_{k,j} e^{i f_j t} \quad (3.109)$$

où $e_{k,j}$ et $I_{k,j}$ sont les composantes des vecteurs \vec{e}_j et \vec{I}_j .

Appliquons cela à Jupiter (m_1) et Saturne (m_2), orbitant autour du Soleil ($m_c = m_S$), avec les conditions initiales suivantes :

TABLE 3.8 – Conditions initiales pour Jupiter et Saturne correspondant à l'année 1983 provenant de [11].

Jupiter		Saturne	
m_1/m_S	$= 9.54786 \times 10^{-4}$	m_2/m_S	$= 2.85837 \times 10^{-4}$
a_1	$= 5.202545 \text{ UA}$	a_2	$= 9.554841 \text{ UA}$
n_1	$= 30.3374^\circ/\text{an}$	n_2	$= 12.1890^\circ/\text{an}$
e_1	$= 0.0474622 \text{ rad}$	e_2	$= 0.0575481 \text{ rad}$
ϖ_1	$= 13.983865^\circ$	ϖ_2	$= 88.719425^\circ$
I_1	$= 1.30667^\circ$	I_2	$= 2.48795^\circ$
Ω_1	$= 100.0381^\circ$	Ω_2	$= 113.1334^\circ$

Les équations de l'excentricité pour Jupiter et Saturne obtenues sont respectivement

$$e_1(t) = \sqrt{0.002168 - 0.001367 \cos(0.005136t + 93.53^\circ)}$$

$$e_2(t) = \sqrt{0.003520 + 0.003372 \cos(0.005136t + 93.53^\circ)}$$

où les phases sont en degrés et les fréquences en degrés par an. La période est de 70098.3 ans.

La Figure 3.23 représente l'évolution de l'excentricité des deux planètes sur une période de 200000 ans, centrée en 1983. On remarque que Jupiter et Saturne sont en interaction car un maximum dans l'excentricité de Jupiter correspond à un minimum dans l'excentricité de Saturne et inversement.

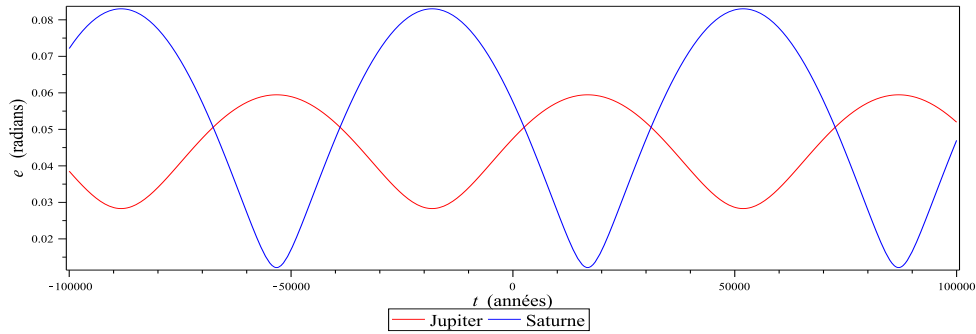


FIGURE 3.23 – Excentricité de Jupiter (rouge) et Saturne (bleu) sur une période de 200000 ans, centrée en 1983, avec les conditions initiales de la Table (3.8).

Les inclinaisons pour Jupiter et Saturne sont respectivement

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \sqrt{0.000856 - 0.00360 \cos(0.00706t + 21.1^\circ)} \\ I_2(t) &= \sqrt{0.00106 + 0.000888 \cos(0.00706t + 21.1^\circ)} \end{aligned}$$

où les phases sont également en degrés et les fréquences en degrés par an. Cette fois, la période est de 50973.3 ans.

L'évolution de l'inclinaison est elle représentée sur la Figure 3.24. Tout comme pour l'excentricité, un maximum pour l'inclinaison de Jupiter correspond à un minimum pour Saturne et inversement.

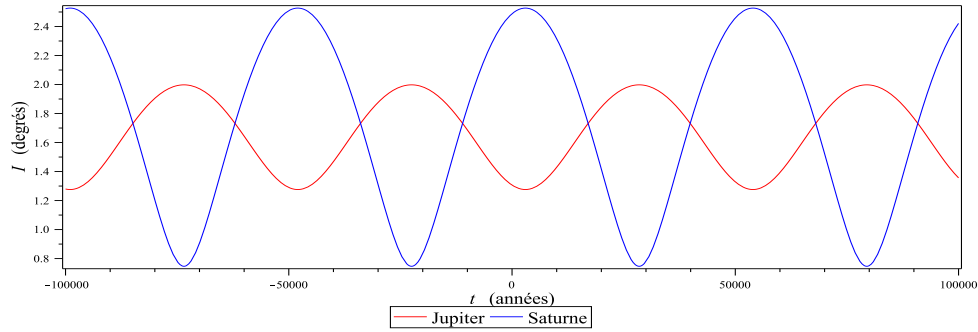


FIGURE 3.24 – Inclinaison de Jupiter (rouge) et Saturne (bleu) sur une période de 200000 ans, centrée en 1983, avec les conditions initiales de la Table (3.8).

3.6.2 Solution séculaire pour une particule perturbée par $N - 1$ corps

Soit m_k une particule dont la masse est négligeable et soient $N - 1$ corps qui la perturbent. Alors, la perturbation due à ces $N - 1$ corps sur la particule est décrite par l'équation suivante

$$\bar{\mathcal{R}}_k = \frac{na^2}{2} \left(A_k (h^2 + k^2) + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N A_j (hh_j + kk_j) + B_k (p^2 + q^2) + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N B_j (pp_j + qq_j) \right) \quad (3.110)$$

où A_i et B_i sont définis comme $A_{k,i}$ et $B_{k,i}$, mais avec $a_k = a$, $n_k = n$ et $m_k = 0$.

La valeur de la fréquence A_k en fonction du demi-grand axe a de la particule est représentée sur la Fig. 3.25. Les deux singularités du graphe correspondent aux demi-grands axes de Jupiter et Saturne. Lorsque le demi-grand axe de la particule se rapproche de celui de Jupiter ou Saturne, α tend vers 1 et le coefficient de Laplace vers l'infini.

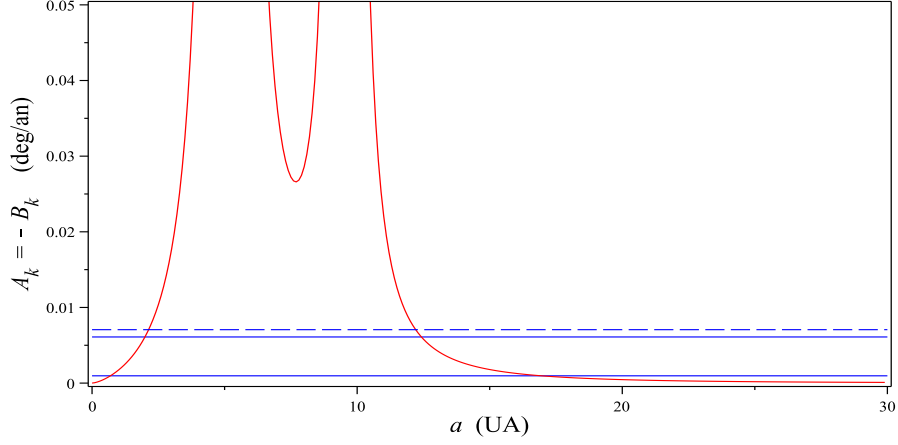


FIGURE 3.25 – Évolution de la fréquence A_k en fonction du demi-grand axe variant de 0 à 30 UA. Les deux lignes pleines représentent les intersections entre A_k et les deux valeurs propres g_1 et g_2 . La ligne en pointillés représente l'intersection entre B_k et la valeur propre f_2 (f_1 étant égale à 0).

En se basant sur les équations (3.105) et (3.106), on peut déduire les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{z} &= izA_k + i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N z_j A_j \\ \dot{Z} &= iZB_k + i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N Z_j B_j \end{cases} \quad (3.111)$$

où z_j et Z_j sont définis par les équations (3.108) et (3.109).

Les solutions homogènes sont les suivantes

$$\begin{cases} z_H &= A^* e^{iA_k t} \\ Z_H &= B^* e^{iB_k t} \end{cases}$$

où A^* et B^* sont des constantes et les solutions particulières sont

$$\begin{cases} z_P &= \sum_{\substack{j \neq k}} E_j e^{ig_j t} \\ Z_P &= \sum_{\substack{j \neq k}} F_j e^{if_j t} \end{cases}$$

où E_j et F_j sont des constantes.

Finalement, la solution pour l'excentricité est

$$z = A^* e^{iA_k t} - \sum_{\substack{j \neq k}} \frac{\sum_{i \neq k} C_j A_i e_{i,j}}{A_k - g_j} e^{ig_j t} \quad (3.112)$$

Dans la Section 3.3 on a décomposé l'excentricité et la longitude du péricentre comme la somme de leurs composantes propres et forcées. On peut faire de même avec la solution séculaire de la particule perturbée par $N - 1$ corps.

La Figure 3.26 montre l'évolution de l'excentricité et la longitude du péricentre forcée ($e_{\text{forcée}}$ et $\varpi_{\text{forcée}}$) lorsqu'on fait varier le demi-grand axe de la particule entre 0 et 30 UA. Ces valeurs forcées proviennent du deuxième terme de l'équation (3.112). La solution séculaire dépend également du temps. Les courbes représentées sur la Fig. 3.26 sont construites pour un temps $t = 0$.

Les 4 singularités sur la courbe de $e_{\text{forcée}}$ (Fig. 3.26) aux environs de 0.5, 2, 12.5 et 17.5 UA sont dues à un petit diviseur dans la deuxième partie de l'équation (3.112), c'est-à-dire, A_k est égal à une des valeurs propres g_i . Ces quatre valeurs sont les intersections entre les droites et la courbe A_k de la Fig. 3.25. Pour la longitude du péricentre, au lieu d'une singularité, on a un changement de 180° dans la longitude.

Avec le temps, la forme des courbes va changer, mais les singularités resteront les mêmes. On peut remarquer que les valeurs de $e_{\text{forcée}}$ et $\varpi_{\text{forcée}}$, lorsque le demi-grand axe de la particule est égal à celui de Jupiter ou Saturne, sont égales aux valeurs de e et ϖ de Jupiter et Saturne au temps $t = 0$. Ces valeurs sont représentées sur le graphe par des points.

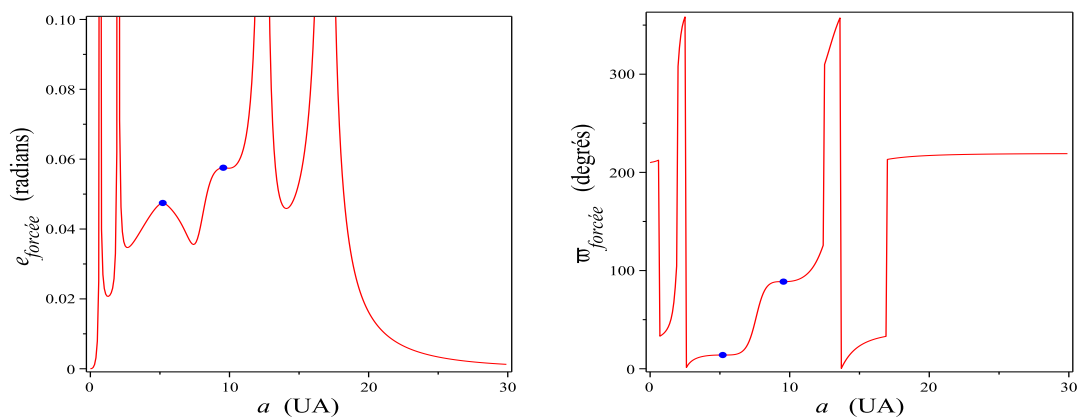


FIGURE 3.26 – Evolution de $e_{\text{forcée}}$ (gauche) et $\varpi_{\text{forcée}}$ (droite) en fonction du demi-grand axe a de la particule au temps $t = 0$. Les points représentent les excentricités et longitudes du péricentre de Jupiter (1^{er}) et Saturne (2^e) en $t = 0$.

La solution pour l'inclinaison est elle

$$Z = B^* e^{iB_k t} - \sum_{j \neq k} \frac{\sum_{i \neq k} D_j B_i I_{i,j}}{B_k - f_j} e^{i f_j t} \quad (3.113)$$

La Fig. 3.27 représente l'évolution de $I_{\text{forcée}}$ et $\Omega_{\text{forcée}}$ en fonction du demi-grand axe également. L'interprétation des graphes est similaire à celle pour l'excentricité. Dans ce cas-ci, il n'y a que deux singularités car une des valeurs propres est nulle.

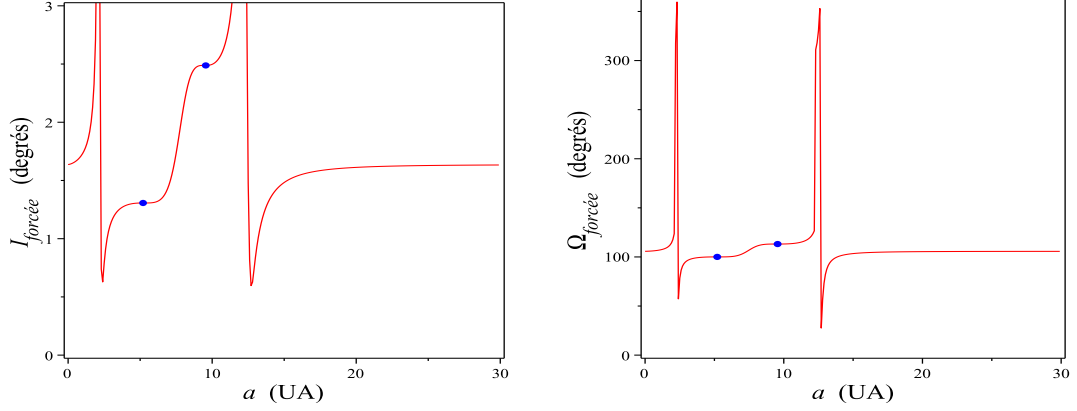


FIGURE 3.27 – Evolution de $I_{\text{forcée}}$ (gauche) et $\Omega_{\text{forcée}}$ (droite) en fonction du demi-grand axe a de la particule au temps $t = 0$. Les points représentent les inclinaisons et longitudes du nœud ascendant de Jupiter (1^{er}) et Saturne (2^e) en $t = 0$.

3.6.3 Solution séculaire pour un Lagrangien de m_k perturbé par $N - 1$ corps

Lorsqu'il y a plusieurs perturbations sur un même corps, la perturbation totale est la somme de toutes ces perturbations. Lorsqu'un Lagrangien de m_k est perturbé par $N - 1$ corps, la perturbation est la suivante :

$$\boxed{\mathcal{R} = \bar{\mathcal{R}}_{1:1,k} + \bar{\mathcal{R}}_{0,k}} \quad (3.114)$$

où $\bar{\mathcal{R}}_{1:1,k}$ est la perturbation du corps secondaire sur la particule, obtenue dans la section 3.1 (équ. (3.21)) avec l'indice 1 remplacé par k , et $\bar{\mathcal{R}}_{0,k}$ est la perturbation des $N - 1$ corps sur le Lagrangien définie dans la sous-section 3.6.2 (équ. 3.110).

On peut construire \dot{z} et \dot{Z} en additionnant la partie correspondant au corps secondaire (équ. 3.50) et la partie correspondant au $N - 1$ corps (équ. 3.111). On obtient alors :

$$\dot{z} = i \left(\gamma_k z - \gamma_k c e^{ib} z_k + A_k z + \sum_{j \neq k} A_j z_j \right) \quad (3.115)$$

$$\dot{Z} = i \left(\Gamma_k Z - \Gamma_k Z_k + B_k Z + \sum_{j \neq k} B_j Z_j \right). \quad (3.116)$$

La solution pour l'excentricité est

$$\boxed{z = A e^{i(\gamma_k + A_k)t} + \sum_j \frac{\gamma_k C_j e_{k,j}}{\gamma_k + A_k - g_j} e^{i(g_j t + b)} - \sum_j \frac{\sum_{i \neq k} A_i C_j e_{i,j}}{\gamma_k + A_k - g_j} e^{ig_j t}} \quad (3.117)$$

et pour l'inclinaison

$$Z = B e^{i(\Gamma_k + B_k)t} + \sum_j \left(\frac{\Gamma_k D_j I_{k,j} - \sum_{i \neq k} B_i D_j I_{i,j}}{\Gamma_k + B_k - f_j} \right) e^{i f_j t} \quad (3.118)$$

Par corps supplémentaire dans le système, un vecteur $e_{\text{forcé}}$ ou $I_{\text{forcé}}$ est ajouté tel que représenté sur la Figure 3.28 :

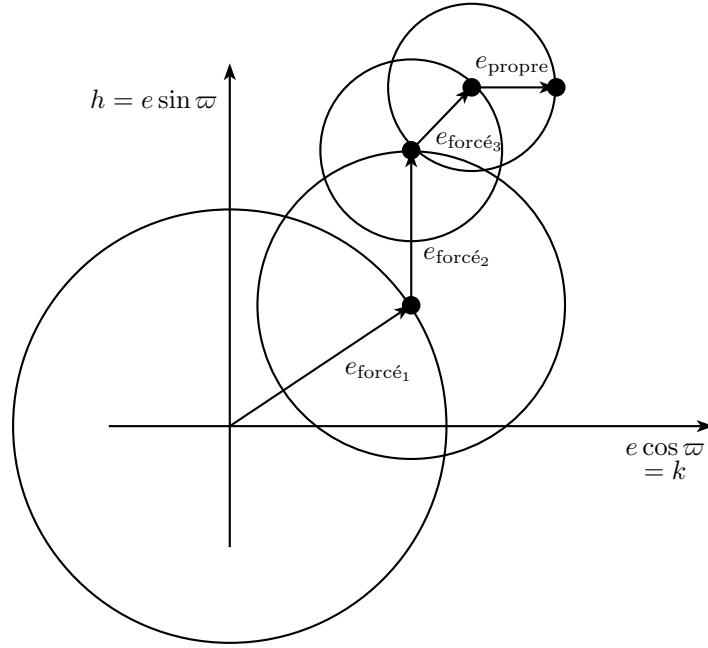


FIGURE 3.28 – Décomposition du mouvement en ses vecteurs forcés et propre.

3.6.4 Comportement de δa et ϕ pour un Lagrangien de m_k perturbé par $N - 1$ corps

Comme précédemment, on peut appliquer les équations de Lagrange afin de calculer l'équation de $\dot{\phi}$. D'après Morais (1999) [8], cette équation est la suivante

$$\boxed{\dot{\phi} = -\frac{3}{2} \frac{\delta a}{a_k} n_k \left(1 + b \sum_{i < k} \frac{m_i}{m_c} + \tilde{b} \sum_{i > k} \frac{m_i}{m_c} \right) + \mathcal{O}(\mu_k n_k)} \quad (3.119)$$

où b et \tilde{b} sont des fonctions des demi-grands axes des corps massifs.

Comme la perturbation ne dépend pas de ϕ , $\delta \dot{a}$ ne change pas, et on peut remplacer l'indice 1 par k , ce qui donne :

$$\boxed{\delta \dot{a} = 2\mu_k n_k a_k \frac{df}{d\phi}} \quad (3.120)$$

Calculons l'équilibre des équations différentielles de $\dot{\phi}$ et $\delta \dot{a}$:

$$\begin{cases} \delta \dot{a} = 0 \\ \dot{\phi} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2\mu_k n_k a_k \frac{df}{d\phi} \\ 0 = -\frac{3}{2} \frac{\delta a}{a_k} n_k \left(1 + b \sum_{i < k} \frac{m_i}{m_c} + \tilde{b} \sum_{i > k} \frac{m_i}{m_c} \right) \end{cases}$$

La deuxième équation nous permet de dire que $\delta a = 0$ car le terme entre parenthèses est constant, et la première équation, que $\frac{df}{d\phi} = 0$. Ces deux résultats sont les mêmes que pour le modèle de base. Les points d'équilibre ne changent donc pas et sont toujours les points de Lagrange L_4 et L_5 .

On peut ensuite dériver une seconde fois ϕ

$$\ddot{\phi} = -\frac{3}{2} \frac{\delta \dot{a}}{a_k} n_k \left(1 + b \sum_{i < k} \frac{m_i}{m_c} + \tilde{b} \sum_{i > k} \frac{m_i}{m_c} \right) + \mathcal{O}(\mu_k n_k) \quad (3.121)$$

et remplacer $\delta \dot{a}$ par son équation (3.120) :

$$\ddot{\phi} = -\frac{3}{\mu_k} n_k^2 \left(1 + b \sum_{i < k} \frac{m_i}{m_c} + \tilde{b} \sum_{i > k} \frac{m_i}{m_c} \right) + \mathcal{O}(\mu_k n_k) \quad (3.122)$$

L'équation (3.122) possède également une intégrale première. Utilisons la même méthode que précédemment afin de la trouver :

$$\ddot{\phi} = u \frac{df}{d\phi} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + u f \right) = 0, \quad (3.123)$$

où u cette fois vaut

$$u = -3\mu_k n_k^2 \left(1 + b \sum_{i < k} \frac{m_i}{m_c} + \tilde{b} \sum_{i > k} \frac{m_i}{m_c} \right). \quad (3.124)$$

L'intégrale première est donc définie par

$$E = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + uf \quad (3.125)$$

$$= -\frac{1}{6}\dot{\phi}^2 - \mu_k n_k^2 \left(1 + b \sum_{i < k} \frac{m_i}{m_c} + \tilde{b} \sum_{i > k} \frac{m_i}{m_c} \right) f. \quad (3.126)$$

Insérons maintenant l'équation de $\dot{\phi}$ dans l'équation de l'énergie. On obtient alors

$$\boxed{\frac{\delta a}{a_1} = \pm \sqrt{\frac{-8\mu_k f}{3 \left(1 + b \sum_{i < k} \frac{m_i}{m_c} + \tilde{b} \sum_{i > k} \frac{m_i}{m_c} \right)} - \frac{8E}{3n_k^2 \left(1 + b \sum_{i < k} \frac{m_i}{m_c} + \tilde{b} \sum_{i > k} \frac{m_i}{m_c} \right)^2}} \quad (3.127)$$

On peut calculer les racines de cette équation lorsque $\dot{\phi} = 0$ (i.e. $\delta a = 0$) comme précédemment. On obtient alors les trois racines réelles suivantes ($k = 0, 1, 2$) :

$$X_k = 2\sqrt{-\frac{1}{6} \left(\frac{E}{\mu_1 n_1^2} \right) \left(1 + b \sum_{i < k} \frac{m_i}{m_c} + \tilde{b} \sum_{i > k} \frac{m_i}{m_c} \right)^{-1}} \\ \times \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{1}{8} \left(-6 \left(\frac{E}{\mu_1 n_1^2} \right)^{-1} \left(1 + b \sum_{i < k} \frac{m_i}{m_c} + \tilde{b} \sum_{i > k} \frac{m_i}{m_c} \right) \right)^{3/2} \right) + \frac{2k\pi}{3} \right)$$

et donc

$$\phi = \begin{cases} 2 \arcsin(X_k) \\ 2\pi - 2 \arcsin(X_k) \end{cases} \quad (3.128)$$

Comme précédemment, les racines définies par X_1 sont rejetées car elles ne font pas partie du domaine de définition de l'arcsin. Les racines définies par X_0 existent pour

$$-\frac{5}{2}\mu_1 n_1^2 \left(1 + b \sum_{i < k} \frac{m_i}{m_c} + \tilde{b} \sum_{i > k} \frac{m_i}{m_c} \right) < E < -\frac{3}{2}\mu_1 n_1^2 \left(1 + b \sum_{i < k} \frac{m_i}{m_c} + \tilde{b} \sum_{i > k} \frac{m_i}{m_c} \right)$$

et celles définies par X_2 , pour

$$E < -\frac{3}{2}\mu_1 n_1^2 \left(1 + b \sum_{i < k} \frac{m_i}{m_c} + \tilde{b} \sum_{i > k} \frac{m_i}{m_c} \right).$$

CHAPITRE 4

APPLICATION À URANUS

Le système d'Uranus est un bon exemple pour appliquer la théorie séculaire développée dans le chapitre précédent. En effet, il n'y a pas de résonance connue entre les cinq satellites principaux (Miranda, Ariel, Umbriel, Titania et Obéron), et les excentricités et inclinaisons des différents satellites sont petites ce qui convient pour notre modèle.

Les conditions initiales utilisées proviennent de l'article de Malhotra (1989) [6] et sont les suivantes :

TABLE 4.1 – Conditions initiales pour les satellites d'Uranus, provenant de [6].

i	Satellite	m_i/m_U $\times 10^5$	a_i (km)	e_i (rad.)	ϖ_i (deg.)	I_i (deg.)	Ω_i (deg.)
1	Miranda	0.1	129775	0.002564	112.69	4.2805	21.00
2	Ariel	1.8	190822	0.003330	116.75	0.3105	263.08
3	Umbriel	1.1	265832	0.005342	197.53	0.3602	279.05
4	Titania	3.2	436035	0.001347	143.19	0.1421	311.07
5	Obéron	3.4	583117	0.001331	180.80	0.1009	234.00

$$GM = 5.784184 \times 10^6 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$$

$$J_2 = 3.3450 \times 10^{-3}$$

$$R_U = 26200 \text{ km}$$

4.1 Modèle de base

Dans ce modèle des trois corps, le corps central est donc Uranus. On choisit ensuite comme corps secondaire le plus grand des satellites d'Uranus, c'est-à-dire, Titania, et on place une particule à son point de Lagrange L_4 .

On suppose que ce Lagrangien a une masse négligeable par rapport aux masses d'Uranus et de Titania. On pose donc $m = 0$ et on utilise les conditions initiales suivantes : $e_0 = 0$, $I_0 = 0^\circ$, $\varpi_0 = 0^\circ$, $\Omega_0 = 0^\circ$ et enfin $a_0 = 0.18 \sqrt{\mu_4} \text{ km}$ (i.e. $l = 0.1$).

On obtient alors les graphes représentés sur la Figure 4.1. Ces graphes représentent l'excentricité et l'inclinaison en fonction du temps, ainsi que la décomposition du mouvement en fonction du vecteur forcé et du vecteur propre, pour l'excentricité et l'inclinaison.

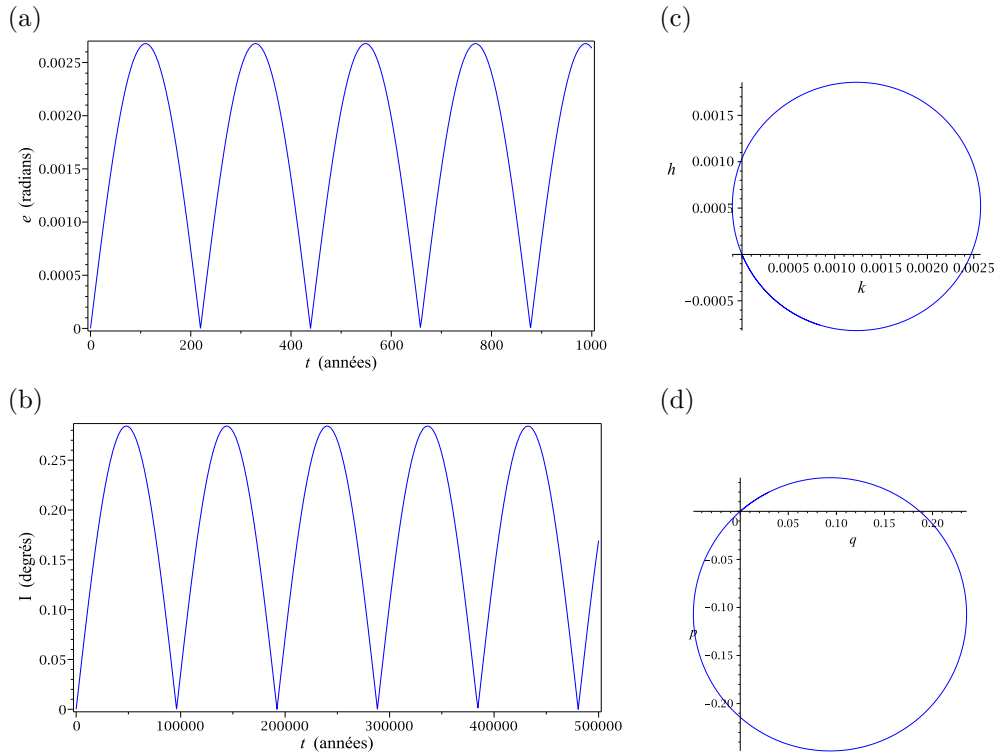


FIGURE 4.1 – (a) excentricité (en radians) et (b) inclinaison (en degrés) du Lagrangien de Titania en fonction du temps (en années) ainsi que la décomposition en vecteurs forcés et libres pour l'excentricité en (c) et l'inclinaison en (d).

La variation de l'inclinaison est beaucoup plus lente que celle de l'excentricité. Les valeurs de l'amplitude de l'excentricité et de l'inclinaison ainsi que leur période sont reprises dans la Table 4.2 :

TABLE 4.2 – Amplitudes et périodes de l'excentricité et de l'inclinaison du Lagrangien de Titania.

	Amplitude	Période
		(années)
e	0.00134	219
I	0.142°	96098

Si on change l'excentricité initiale du Lagrangien afin qu'elle soit plus proche de l'excentricité de Titania, c'est-à-dire, $e_0 = 0.0012$ radian, alors l'amplitude de l'excentricité de la particule diminue. L'excentricité varie maintenant entre 0.00082 et 0.00185 radian. L'amplitude est donc égale à 0.0005 radian. La période, elle, ne change pas, elle est toujours d'environ 220 ans.

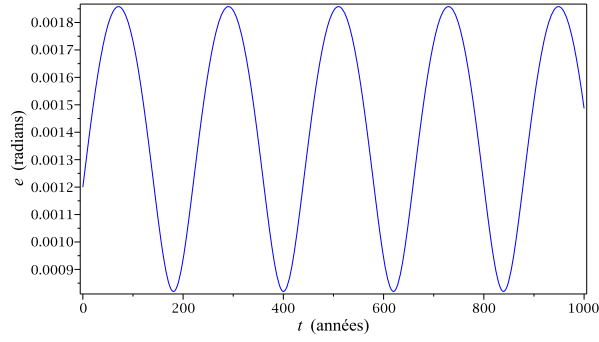


FIGURE 4.2 – Excentricité (en radians) du Lagrangien de Titania en fonction du temps (en années) pour $e_0 = 0.0012$.

On peut également modifier l'inclinaison initiale de la particule afin de réduire son amplitude. En prenant $I_0 = 0.13^\circ$, l'inclinaison varie entre 0.0289 et 0.255° et donc l'amplitude est égale à 0.113° , tout en gardant la même période.

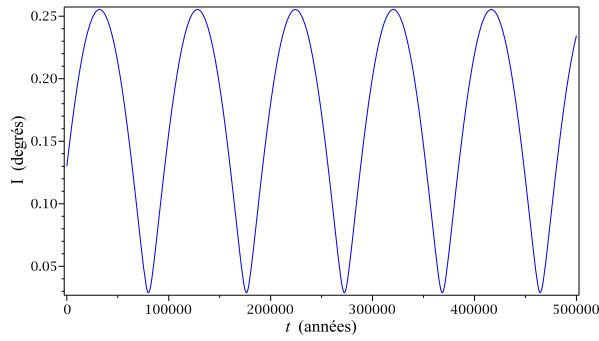


FIGURE 4.3 – Inclinaison (en degrés) du Lagrangien de Titania en fonction du temps (en années) pour $I_0 = 0.13$.

4.2 Ajout de l'aplatissement d'Uranus

Dans cette section, on tient compte de l'aplatissement d'Uranus via son J_2 . Les graphes prennent alors les allures des courbes rouges obtenues sur la Figure 4.4. Les courbes bleues représentent l'excentricité et l'inclinaison de la section précédente, lorsque l'on ne tient pas compte de l'aplatissement.

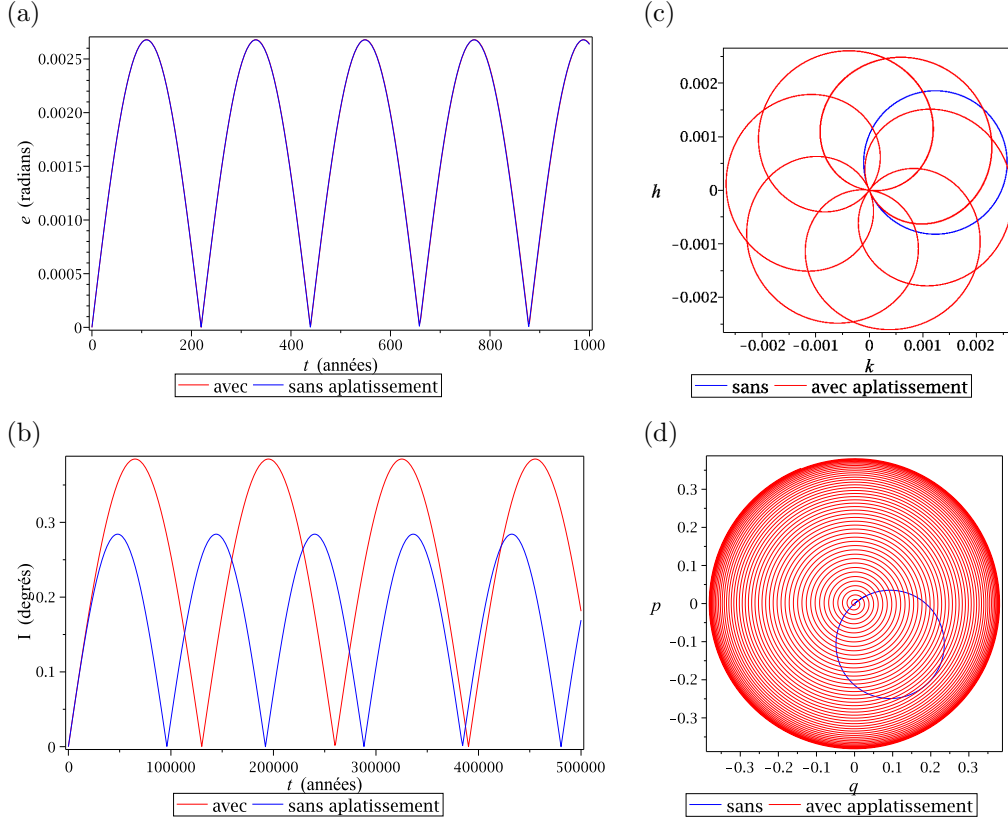


FIGURE 4.4 – (a) excentricité (en radians) et (b) inclinaison (en degrés) du Lagrangien de Titania en fonction du temps (en années) ainsi que la décomposition en vecteurs forcés et libres pour l'excentricité en (c) et l'inclinaison en (d) lorsque l'on tient compte de l'aplatissement d'Uranus.

On remarque que les courbes bleue et rouge pour l'excentricité en fonction du temps sont assez proches. Par contre, celles de l'inclinaison sont différentes.

Dans ce cas-ci, l'amplitude de l'excentricité avec aplatissement est plus grande de 8×10^{-7} radian que l'excentricité sans aplatissement, ce qui est négligeable. La période est également plus grande de 0.13 an, c'est-à-dire, de 48 jours.

L'inclinaison est plus affectée par l'aplatissement que l'excentricité. En effet, son amplitude augmente de 0.05 degré et sa période augmente de 33980 ans.

Lorsque l'on décompose le mouvement en ses parties forcée et propre, on remarque également que les graphes sont différents. Cela est dû à l'aplatissement d'Uranus. Comme déjà dit, l'aplatissement agit sur la particule, mais également sur le corps secondaire (Titania). Le vecteur forcé qui dépend de Titania n'est donc plus constant, il tourne également.

Dans le cas de l'excentricité, la fréquence du vecteur forcé est plus rapide que celle du vecteur propre. Pour l'inclinaison, les fréquences du vecteur forcé et du vecteur libre sont fort proches.

Cela explique la forme des graphes (c) et (d).

TABLE 4.3 – Fréquences et périodes des vecteurs forcé et propre de l'excentricité et l'inclinaison de Titania lorsqu'on ajoute l'aplatissement d'Uranus.

	Fréquence (nb tours par an)	Période (années)
$e_{\text{forcé}}$	7.568×10^{-4}	1321.289
e_{propre}	5.314×10^{-3}	188.196
$I_{\text{forcé}}$	7.596×10^{-4}	1316.560
I_{propre}	7.672×10^{-4}	1303.369

4.3 Ajout d'un corps

On ajoute maintenant un deuxième satellite, Umbriel, au modèle, toujours en tenant compte de l'aplatissement du corps central. Le modèle comprend donc quatre corps.

Les deux satellites, Titania et Umbriel, ont une influence l'un sur l'autre pour l'excentricité et l'inclinaison. Ces variations sont représentées sur la Figure 4.5.

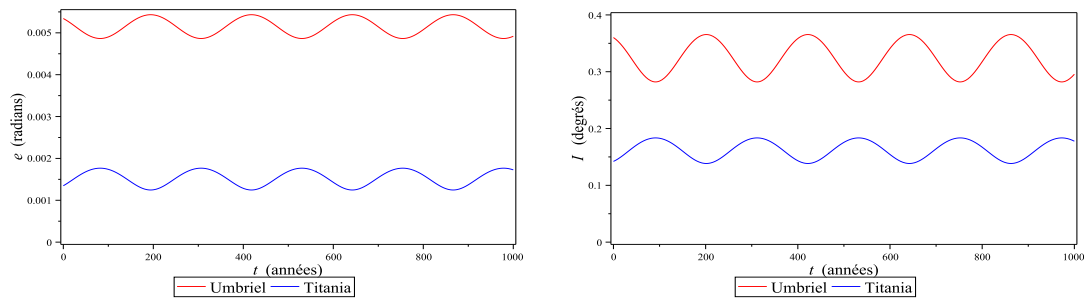


FIGURE 4.5 – (a) excentricité (en radians) et (b) inclinaison (en degrés) de Titania et Umbriel en fonction du temps (en années).

Au lieu d'avoir une excentricité ou une inclinaison constante, celles-ci varient. Les amplitudes de l'excentricité et l'inclinaison de Titania et Umbriel sont reprises dans la Table 4.4 :

TABLE 4.4 – Amplitudes de l'excentricité et de l'inclinaison de Titania et Umbriel.

	Titania	Umbriel
Amplitude e	2.6×10^{-4}	2.8×10^{-4}
Amplitude I	2.3×10^{-2}	4.2×10^{-2}

Les fréquences séculaires g_j et f_j obtenues grâce aux matrices A et B construites grâce aux équations (3.102) sont les suivantes :

TABLE 4.5 – Fréquences séculaires pour Umbriel et Titania.

Mode j	g_j (deg./an)	f_j (deg./an)
3	1.976	-1.990
4	0.370	-0.356

Rappelons les équations de z (3.117) et Z (3.118) :

$$z = A e^{i(\gamma_k + A_k)t} + \sum_j \frac{\gamma_k C_j e_{k,j}}{\gamma_k + A_k - g_j} e^{i(g_j t + b)} - \sum_j \frac{\sum_{i \neq k} A_i C_j e_{i,j}}{\gamma_k + A_k - g_j} e^{i g_j t}$$

et

$$Z = B e^{i(\Gamma_k + B_k)t} + \sum_j \left(\frac{\Gamma_k D_j I_{k,j} - \sum_{i \neq k} B_i D_j I_{i,j}}{\Gamma_k + B_k - f_j} \right) e^{i f_j t}.$$

Dans les équations ci-dessus, il y a les dénominateurs suivant :

$$\gamma_k + A_k - g_j \quad \text{et} \quad \Gamma_k + B_k - f_j.$$

Si ces dénominateurs sont petits, alors les valeurs de l'excentricité ou de l'inclinaison deviennent grandes. C'est ce qu'il se passe ici pour l'excentricité. On se trouve alors proche d'une résonance séculaire.

Pour localiser ces résonances séculaires, on trace sur la Figure 4.6 les courbes γ_k et Γ_k ainsi que les droites $A_k - g_j$ et $B_k - f_j$. Les résonances apparaissent aux positions $a_0/\sqrt{\mu_k}$ déterminées par les intersections de ces courbes et droites.

Afin de rassembler les résultats pour chaque satellite sur le même graphe, les fréquences γ_k et Γ_k sont divisées par $\mu_k n_k$.

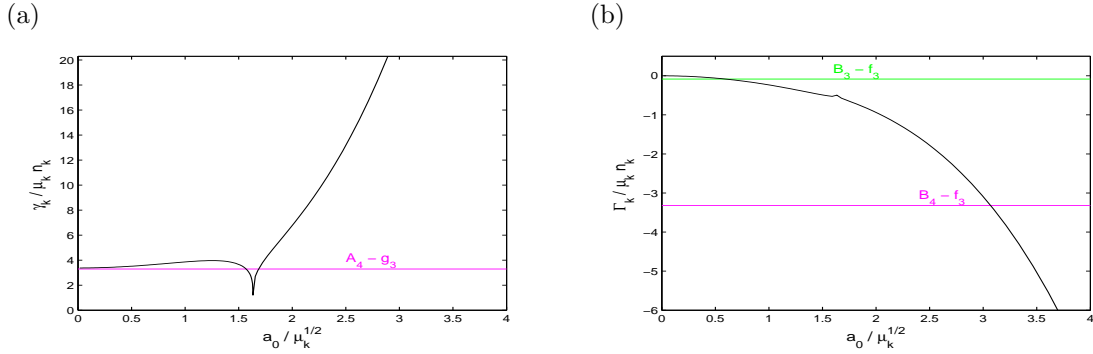


FIGURE 4.6 – Localisation des résonances séculaires dans le cas de l'excentricité en (a) et de l'inclinaison en (b) pour les deux satellites (Umbriel (m_3) et Titania (m_4)).

Regardons maintenant l'excentricité et l'inclinaison du Lagrangien de Titania représentées sur la Figure 4.7.

Comme $a_0/\mu_k = 0.18$, grâce à la Figure 4.6, on peut prédire que le petit dénominateur $\gamma_4 + A_4 - g_3$ va dominer le comportement du Lagrangien de Titania. On obtient alors que l'amplitude de l'excentricité du Lagrangien augmente fortement comme nous pouvons le voir sur la Figure 4.7.

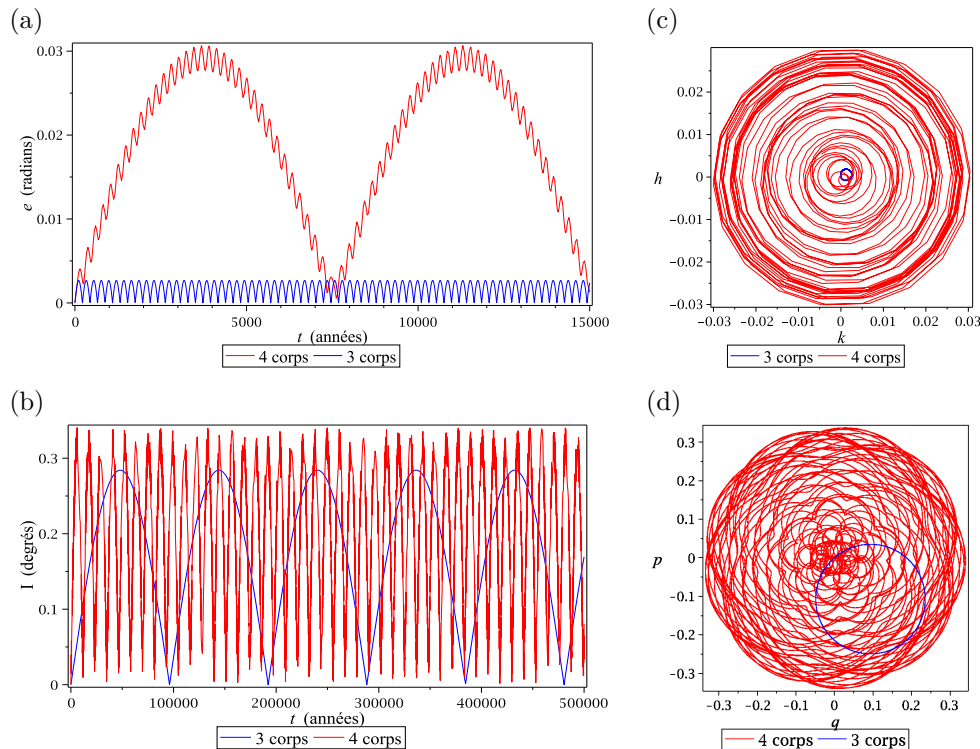


FIGURE 4.7 – (a) excentricité (en radians) et (b) inclinaison (en degrés) du Lagrangien de Titania en fonction du temps (en années) ainsi que la décomposition en vecteurs forcés et libres pour l'excentricité en (c) et l'inclinaison en (d) lorsque l'on ajoute le satellite Umbriel au système, tout en tenant compte de l'aplatissement d'Uranus.

L'ajout d'Umbriel dans le système a pour conséquence l'apparition d'une deuxième période sur la courbe de l'excentricité et de l'inclinaison. Pour l'excentricité, cette période est de 7327 ans et pour l'inclinaison, elle est de 224 ans.

Les valeurs des amplitudes et périodes sont reprises dans la Table 4.6.

La petite période de l'excentricité est toujours due à la perturbation de Titania. Mais puisqu'on a ajouté Umbriel au système, ce dernier perturbe également Titania, d'où la variation de la période. Il en est de même avec la grande période de l'inclinaison, mais la variation de celle-ci est plus importante.

TABLE 4.6 – Comparaison des amplitudes et périodes de l'excentricité et de l'inclinaison du Lagrangien de Titania pour le modèle de base et pour le modèle avec aplatissement d'Uranus et ajout d'Umbriel.

	Amplitude	Période (petite) (années)	Période (grande) (années)
e_{base}	0.00134	219	
$e_{4\text{corps}}$	0.015	217	7327
I_{base}	0.142°		96098
$I_{4\text{corps}}$	0.17°	224	11027

Les Figures 4.7 (c) et (d) représentent la décomposition de la courbe en ses vecteurs forcés et propre. Comme on ajoute un corps dans le système, il y a toujours le vecteur propre, mais il n'y a plus un vecteur forcé mais deux. Le premier correspond à Titania et le deuxième à Umbriel. Les fréquences et périodes de ces vecteurs sont reprises dans la Table 4.7

TABLE 4.7 – Fréquences et périodes des vecteurs forcés et propres de l'excentricité et l'inclinaison de Titania lorsqu'on ajoute l'aplatissement d'Uranus ainsi qu'Umbriel (modèle des 4 corps).

	Fréquence (nb tours par an)	Période (années)		Fréquence (nb tours par an)	Période (années)
$e_{\text{forcé}_1}$	6.455×10^{-3}	154.927	$I_{\text{forcé}_1}$	6.215×10^{-3}	160.892
$e_{\text{forcé}_2}$	3.449×10^{-2}	28.991	$I_{\text{forcé}_2}$	3.473×10^{-2}	28.791
e_{propre}	3.532×10^{-2}	28.310	I_{propre}	6.757×10^{-3}	148.004

Dans le cas de l'excentricité et de l'inclinaison, il y a deux fréquences qui sont proches et une fort différente, d'où un tel graphe.

4.4 Ajout des 3 derniers satellites

On ajoute maintenant dans le modèle les trois derniers satellites, Miranda, Ariel et Obéron. Le modèle comprend maintenant sept corps : Uranus, ses cinq satellites principaux ainsi qu'un Lagrangien de Titania situé au point de Lagrange L_4 . Les conditions initiales sont toujours les mêmes que celles données dans la Table 4.1

Les cinq satellites sont perturbés par Uranus mais ils se perturbent entre eux également. Ces perturbations pour l'excentricité et l'inclinaison sont représentées sur la Figure 4.8.

Miranda est le satellite le plus proche d'Uranus. On peut donc en conclure que la fréquence élevée des oscillations de son excentricité et inclinaison est due à l'influence de l'aplatissement d'Uranus. Par contre, Titania et Obéron sont les satellites les plus éloignés. Leurs excentricités ont une fréquence plus lente. La perturbation la plus grande de ces deux satellites est plutôt due à leurs influences respectives sur l'autre corps. On remarque également que lorsque l'excentricité de Titania est à son maximum, celle d'Obéron est à son minimum. Il y a donc une interaction entre ces deux satellites. C'est également le cas avec Umbriel et Ariel. Les périodes d'oscillation de ces satellites pour l'excentricité sont reprises dans la Table 4.8

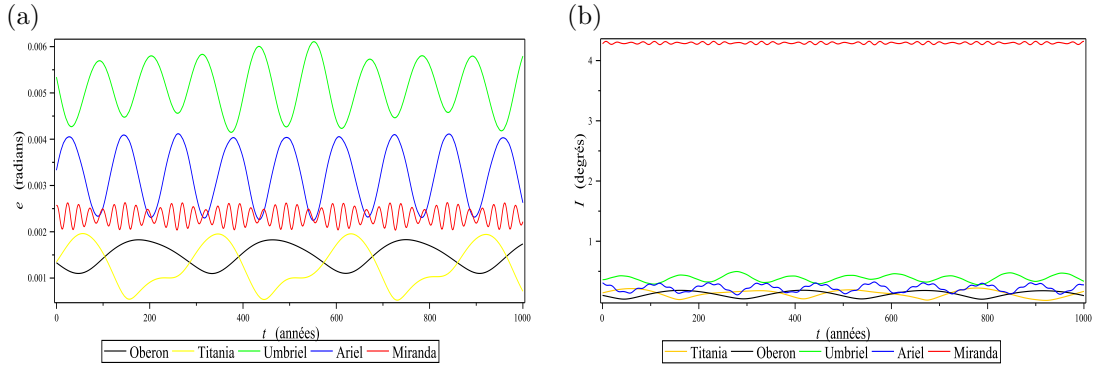


FIGURE 4.8 – (a) excentricité (en radians) et (b) inclinaison (en degrés) des 5 satellites d'Uranus, perturbés par Uranus et eux-mêmes, en fonction du temps (en années).

La Figure 4.9 est une copie de la Figure 4.8 (b) où on a retiré la courbe rouge représentant l'inclinaison de Miranda car cette dernière est plus élevée que celle des quatre autres satellites. Cette suppression permet de mieux voir comment se comporte l'inclinaison des quatre autres satellites.

Comme pour l'excentricité, Obéron et Titania ont une fréquence d'oscillation plus lente, avec toujours l'inclinaison minimum de l'un qui correspond à l'inclinaison maximum de l'autre. Cette alternance est toujours observable pour les inclinaisons d'Umbriel et Ariel. On remarque également une deuxième oscillation sur la courbe d'Ariel. Celle-ci est due à l'aplatissement d'Uranus et a la même fréquence que l'oscillation de Miranda. Les périodes d'oscillation des inclinaisons de ces satellites sont également reprises dans la Table 4.8.

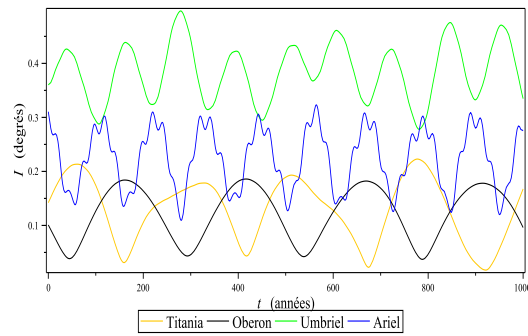


FIGURE 4.9 – Inclinaison des 5 satellites d'Uranus où on a retiré la courbe de l'inclinaison de Miranda.

TABLE 4.8 – Périodes d’oscillation des satellites d’Uranus, pour l’excentricité et l’inclinaison.

	Période e (années)	Période I (années)
Miranda	25	25
Ariel	115	25 et 113
Umbriel	115	113
Titania	285	258
Obéron	285	258

Comme dans la section précédente, on a calculé les fréquences séculaires qui sont les suivantes :

TABLE 4.9 – Fréquences séculaires pour les 5 satellites.

Mode j	g_j (deg./an)	f_j (deg./an)
1	20.557	-20.547
2	5.961	-6.011
3	2.855	-2.817
4	1.608	-1.693
5	0.352	-0.248

Regardons ensuite où se situent les résonances séculaires lorsqu’il y a cinq corps (Fig. 4.10) :

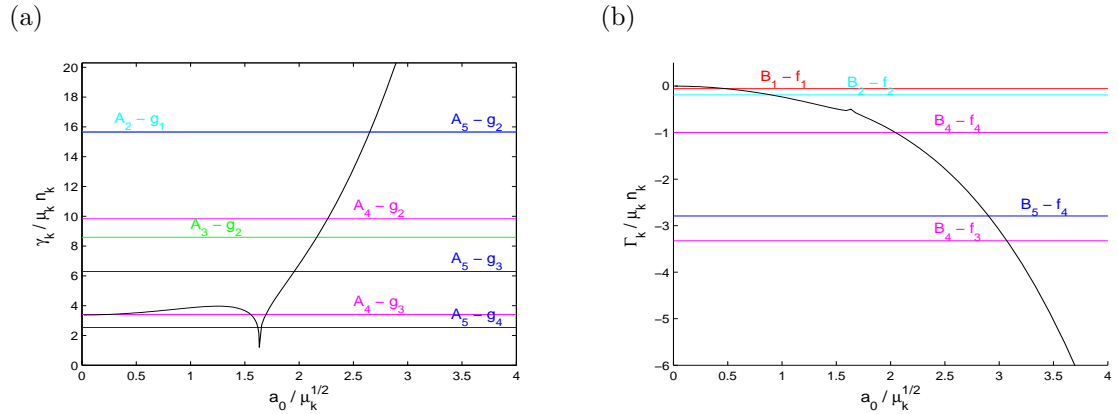


FIGURE 4.10 – Localisation des résonances séculaires dans le cas de l’excentricité en (a) et de l’inclinaison en (b) pour les cinq satellites.

Analysons maintenant le comportement de l’excentricité et inclinaison du Lagrangien. Les différentes courbes sont représentées sur la Figure 4.11.

Grâce à la Figure 4.10, on peut dire que le comportement de l’excentricité va encore être dominé par le petit dénominateur $\gamma_4 + A_4 - g_3$.

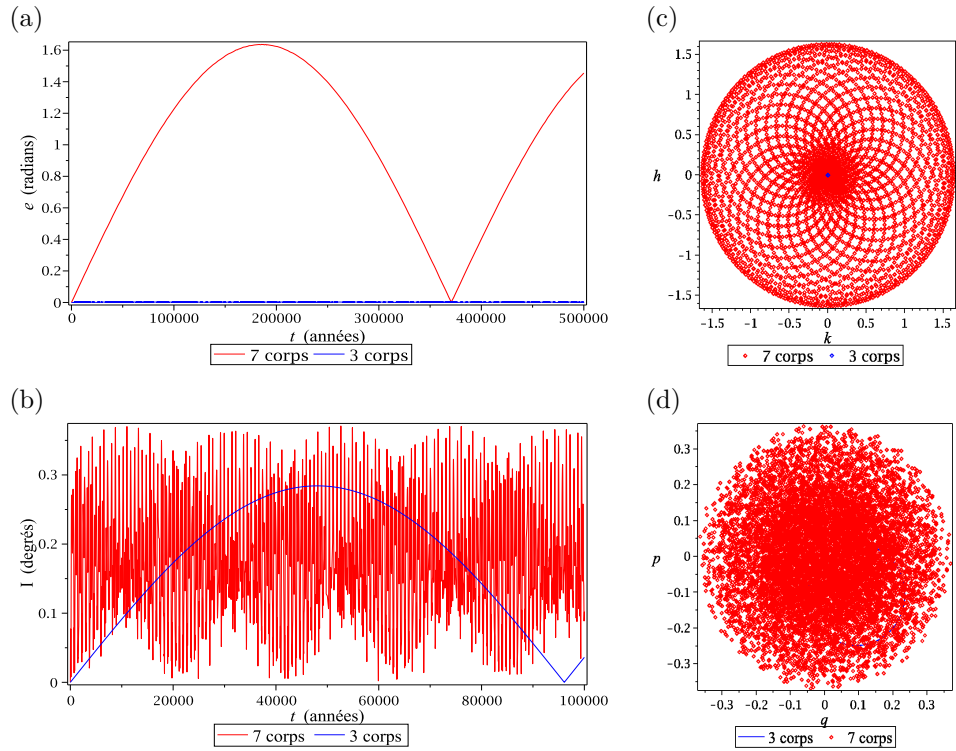


FIGURE 4.11 – (a) excentricité (en radians) et (b) inclinaison (en degrés) du Lagrangien de Titania en fonction du temps (en années) ainsi que la décomposition en vecteurs forcés et libres pour l'excentricité en (c) et l'inclinaison en (d) lorsque le modèle comprend Uranus, les 5 satellites, et la particule, tout en tenant compte de l'aplatissement d'Uranus.

L'excentricité atteint la valeur de 1.6 radians. Cela n'est pas possible. Le résultat est certainement faussé par la trop grande proximité de la résonance séculaire.

L'inclinaison atteint la valeur de 0.37° et sa période de libration diminue par rapport au modèle de base. Elle est environ quatre fois plus petite.

TABLE 4.10 – Comparaison de l'amplitude et des périodes de l'inclinaison du Lagrangien de Titania pour le modèle de base et pour le modèle avec aplatissement d'Uranus et ses cinq satellites.

	Amplitude	Période (petite) (années)	Période (grande) (années)
I_{base}	0.142°		96098
$I_{7\text{corps}}$	0.37°	756	22000

Pour voir comment se comporte l'excentricité lorsqu'il y a cinq corps dans le système en plus d'Uranus et du Lagrangien, on peut retracer les graphes en changeant les conditions initiales. Prenons $a_0 = 0$. On obtient alors la Figure 4.12 :

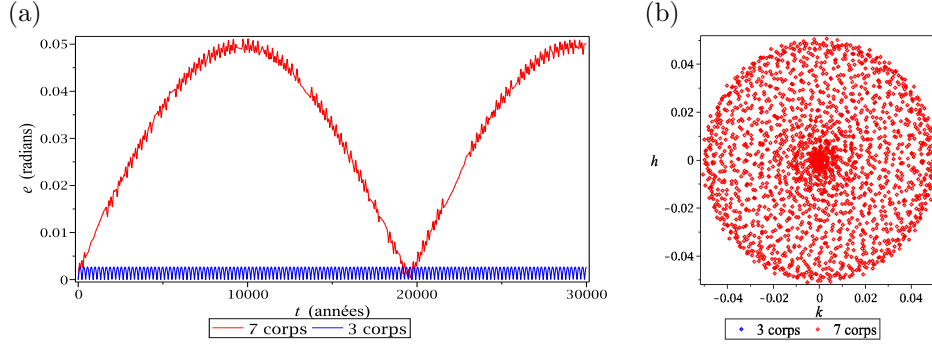


FIGURE 4.12 – (a) excentricité (en radians) du Lagrangien de Titania en fonction du temps (en années) ainsi que la décomposition en vecteurs forcés et libres pour l'excentricité en (b) pour $a_0 = 0$, lorsque le modèle comprend Uranus, les 5 satellites, et la particule, tout en tenant compte de l'aplatissement d'Uranus.

Cette fois on se trouve pas près d'une résonance séculaire. Les valeurs de l'amplitude et des périodes de l'excentricité sont reprises dans la Table 4.11 :

TABLE 4.11 – Comparaison de l'amplitudes et périodes de l'excentricité du Lagrangien de Titania pour le modèle de base et pour le modèle avec aplatissement d'Uranus et ajout d'Umbriel.

	Amplitude	Période (petite) (années)	Période (moyenne) (années)	Période (grande) (années)
e_{base}	0.00134	219		
$e_{7\text{corps}}$	0.025	145	293	19712

L'amplitude de l'excentricité est environ multipliée par 20 et la période de base se trouve pile au milieu des deux plus petites périodes du modèle comprenant les cinq corps.

Dans ce cas-ci, comme il y a cinq satellites en plus du Lagrangien, il y a donc cinq vecteurs forcés et un vecteur propre. Les valeurs de leur fréquence et leur période sont rassemblées dans la Table suivante (4.12) :

TABLE 4.12 – Fréquences et périodes des vecteurs forcés et propres de l'excentricité et l'inclinaison de Titania lorsqu'on ajoute l'aplatissement d'Uranus et qu'on tient compte des cinq satellites.

	Fréquence (nb tours par an)	Période (années)		Fréquence (nb tours par an)	Période (années)
$e_{\text{forcé}_1}$	3.588×10^{-1}	2.787	$I_{\text{forcé}_1}$	3.586×10^{-1}	2.788
$e_{\text{forcé}_2}$	1.040×10^{-1}	9.612	$I_{\text{forcé}_2}$	1.049×10^{-1}	9.531
$e_{\text{forcé}_3}$	4.983×10^{-2}	20.070	$I_{\text{forcé}_3}$	4.916×10^{-2}	20.341
$e_{\text{forcé}_4}$	2.806×10^{-2}	35.632	$I_{\text{forcé}_4}$	2.955×10^{-2}	33.845
$e_{\text{forcé}_5}$	6.138×10^{-3}	162.920	$I_{\text{forcé}_5}$	4.335×10^{-3}	230.696
e_{propre}	4.981×10^{-2}	20.076	I_{propre}	2.253×10^{-2}	44.377

La fréquence propre est proche d'une des fréquences forcées. Les autres fréquences sont plus élevées ou plus faibles.

4.5 Changement d'orbite pour le Lagrangien

Dans les sections précédentes, le Lagrangien était situé au point de Lagrange L_4 de Titania. Dans cette section, on va placer ce Lagrangien au point de Lagrange L_4 des quatre autres satellites.

4.5.1 Lagrangien de Miranda

Commençons par placer le Lagrangien sur l'orbite de Miranda, tout en tenant compte de l'aplatissement d'Uranus et de ses cinq satellites.

La Figure 4.13 représente l'excentricité de Lagrangien en fonction du temps.

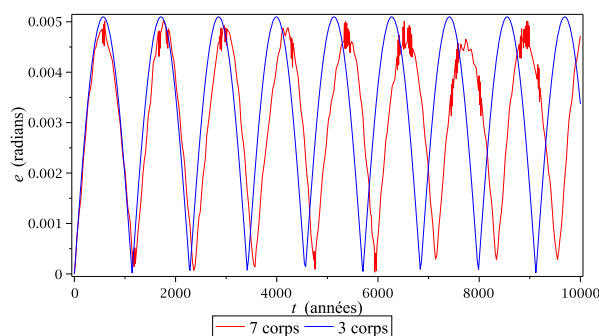


FIGURE 4.13 – Comparaison de l'excentricité (en radians) du Lagrangien de Miranda, en rouge, lorsqu'il y a cinq corps et lorsque l'on tient compte de l'aplatissement d'Uranus, et en bleu, lorsqu'on ne tient compte que de Miranda, sans aplatissement.

Comme Miranda est plus proche d'Uranus que Titania, l'aplatissement d'Uranus a une plus grande influence sur l'excentricité du Lagrangien de Miranda que sur celui de Titania.

TABLE 4.13 – Comparaison de l'amplitude et de la période de l'excentricité du Lagrangien de Miranda pour le modèle de base et pour le modèle avec aplatissement d'Uranus et les cinq corps.

	Amplitude (radians)	Période (années)
e_{base}	2.55×10^{-3}	1140
$e_{7\text{corps}}$	2.5×10^{-3}	1193

La valeur maximale de l'excentricité diminue alors que la période augmente lorsque l'on passe du modèle de base au modèle composé des 5 satellites et de l'aplatissement d'Uranus.

L'inclinaison est représentée sur la Figure 4.14. La période de l'inclinaison est environ 21 fois plus courte que celle du modèle de base et son amplitude est 3 fois plus petite.

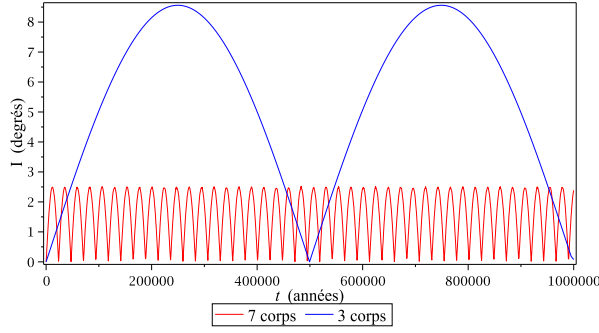


FIGURE 4.14 – Comparaison de l’inclinaison (en degrés) du Lagrangien de Miranda, en rouge, lorsqu’il y a cinq corps et lorsque l’on tient compte de l’aplatissement d’Uranus, et en bleu, lorsqu’on ne tient compte que de Miranda, sans aplatissement.

L’ajout des cinq corps et de l’aplatissement d’Uranus implique donc une diminution de l’amplitude et de la période d’inclinaison.

TABLE 4.14 – Comparaison de l’amplitude et de la période de l’inclinaison du Lagrangien de Miranda pour le modèle de base et pour le modèle avec aplatissement d’Uranus et les cinq corps.

	Amplitude (degrés)	Période (années)
I_{base}	4.28	499303
$I_{7\text{corps}}$	1.3	23575

Les Figures 4.15 et 4.17 représentent respectivement la différence des longitudes du péricentre et la différence des longitudes du nœud ascendant, en fonction du temps.

On remarque sur le premier graphe qu’il y a une libration autour des 180° pour les péricentres, c’est-à-dire, qu’ils bougent ensemble, à une distance angulaire qui varie entre 120° et -60° .

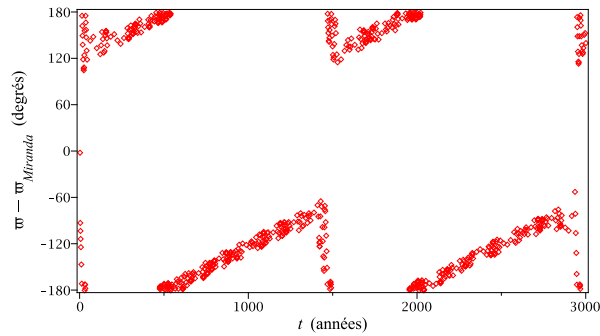


FIGURE 4.15 – Différence des longitudes du péricentre du Lagrangien de Miranda (ϖ) et de Miranda (ϖ_{Miranda}) (en degrés) en fonction du temps (en années).

Cette allure en dents de scie peut être expliquée par les 2 graphes suivants (Fig. 4.16 (a) et (b)) qui sont respectivement la longitude du péricentre de Miranda (ϖ_{Miranda}) et de son Lagrangien (ϖ) (en degrés) sur une période de temps allant de 1000 à 1500 ans.

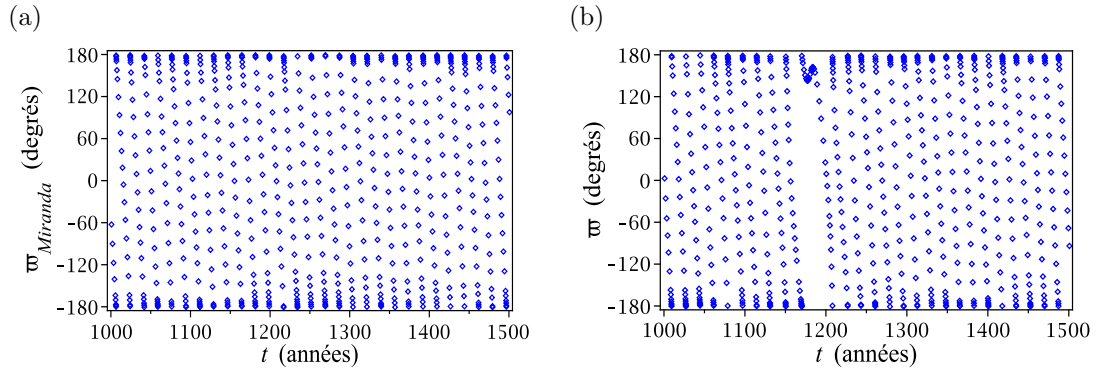


FIGURE 4.16 – Longitude du péricentre de Miranda (ϖ_{Miranda}) (a) et de son lagrangien (ϖ) (b) (en degrés) sur une période de temps allant de 1000 à 1500 ans.

Aux alentours de 1200 ans, sur le graphe (b), on remarque une petite oscillation, qui n'apparaît pas sur le graphe (a). C'est cette petite oscillation qui provoque la dent de scie aux alentours de 1200 ans sur la Figure 4.15. Sinon, on remarque bien que les péricentres tournent ensemble.

Il y a également une libration pour les nœuds autour de 0° qui varie entre -120° et 120° .

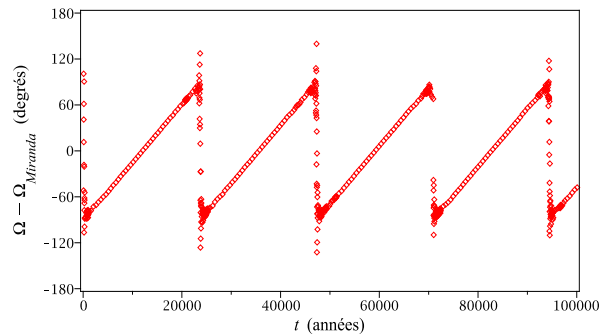


FIGURE 4.17 – Différence des longitudes du nœud ascendant du Lagrangien de Miranda (Ω) et de Miranda (Ω_{Miranda}) en degrés, en fonction du temps (en années).

4.5.2 Lagrangien de Ariel

Plaçons maintenant la particule au point de Lagrange d'Ariel.

L'excentricité du Lagrangien d'Ariel est représentée sur la Figure 4.18.

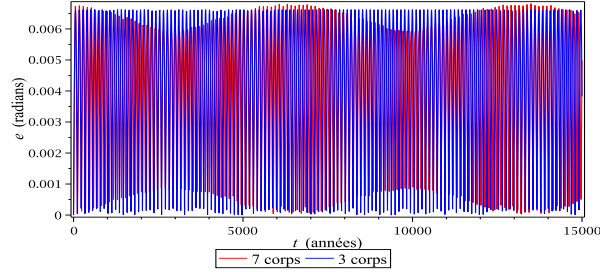


FIGURE 4.18 – Comparaison de l'excentricité (en radians) du Lagrangien d'Ariel, en rouge, lorsqu'il y a cinq corps et lorsque l'on tient compte de l'aplatissement d'Uranus, et en bleu, lorsqu'on ne tient compte que d'Ariel, sans aplatissement.

En ajoutant les quatre satellites supplémentaires, l'amplitude augmente de 10^{-4} radian et la petite période augmente de 5 ans.

TABLE 4.15 – Comparaison de l'amplitude et des périodes de l'excentricité du Lagrangien d'Ariel pour le modèle de base et pour le modèle avec aplatissement d'Uranus et les cinq corps.

	Amplitude (radians)	Période (petite) (années)	Période (grande) (années)
e_{base}	0.0033	113	
$e_{7\text{corps}}$	0.0034	118	7100

La Figure 4.19 représente l'inclinaison du Lagrangien d'Ariel.

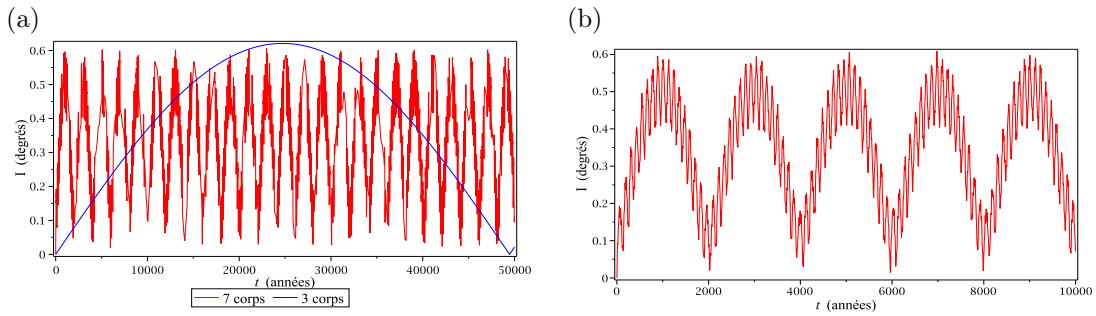


FIGURE 4.19 – (a) comparaison de l'inclinaison (en degrés) du Lagrangien d'Ariel, en rouge, lorsqu'il y a cinq corps et lorsque l'on tient compte de l'aplatissement d'Uranus, et en bleu, lorsqu'on ne tient compte que d'Ariel, sans aplatissement, et (b) inclinaison du Lagrangien sur une période de temps plus courte.

L'ajout des 5 corps et de l'aplatissement d'Uranus implique une diminution de l'amplitude et de

la période.

TABLE 4.16 – Comparaison de l’amplitude et des périodes de l’inclinaison du Lagrangien d’Ariel pour le modèle de base et pour le modèle avec aplatissement d’Uranus et les cinq corps.

	Amplitude (degrés)	Période (petite) (années)	Période (grande) (années)
I_{base}	0.299		49460
$I_{7\text{corps}}$	0.311	120	2006

L’amplitude de l’inclinaison est plus petite de 1.2×10^{-2} degré que celle du modèle de base. Et la grande période est environ 25 fois plus petite.

Les différences des longitudes des péricentres et nœuds ascendants sont représentées sur la Figure 4.20. Il y a une libration pour les péricentres qui varie entre 120° et -60° et un mélange de libration et circulation pour les nœuds.

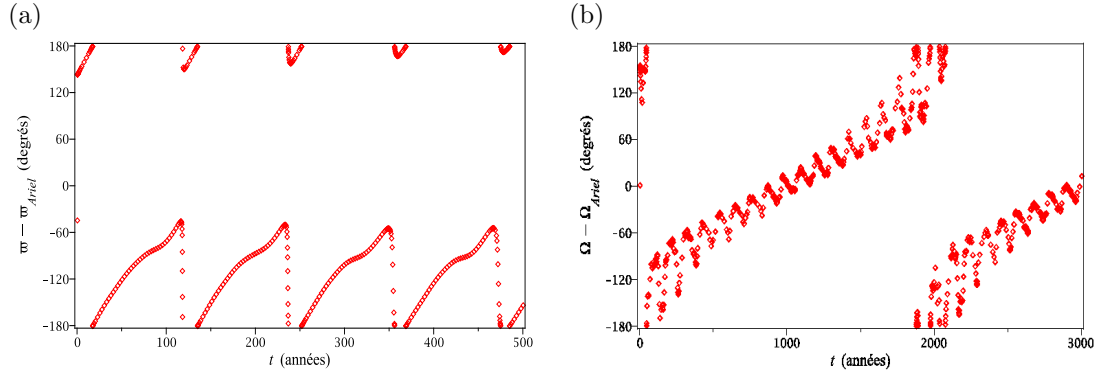


FIGURE 4.20 – Différence des longitudes du péricentre (a) et des longitudes des nœuds ascendants (b) du Lagrangien de Ariel (ϖ et Ω) et de Ariel (ϖ_{Ariel} et Ω_{Ariel}) (en degrés) en fonction du temps (en années).

4.5.3 Lagrangien de Umbriel

Regardons maintenant ce qu'il se passe lorsque l'on place le Lagrangien au point de Lagrange L_4 d'Umbriel.

L'excentricité est tracée sur la Figure 4.21

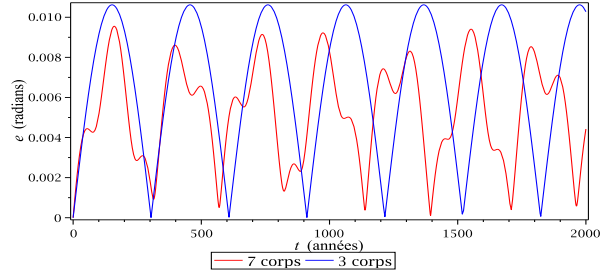


FIGURE 4.21 – Comparaison de l'excentricité (en radians) du Lagrangien d'Umbriel, en rouge, lorsqu'il y a cinq corps et lorsque l'on tient compte de l'aplatissement d'Uranus, et en bleu, lorsqu'on ne tient compte que d'Umbriel, sans aplatissement.

En ajoutant l'aplatissement et les quatre satellites supplémentaires, l'amplitude de l'excentricité ainsi que sa période diminuent.

TABLE 4.17 – Comparaison de l'amplitude et de la période de l'excentricité du Lagrangien d'Umbriel pour le modèle de base et pour le modèle avec aplatissement d'Uranus et les cinq corps.

	Amplitude (radians)	Période (années)
e_{base}	0.0053	304
$e_{7\text{corps}}$	0.0047	280

Passons maintenant à l'inclinaison :

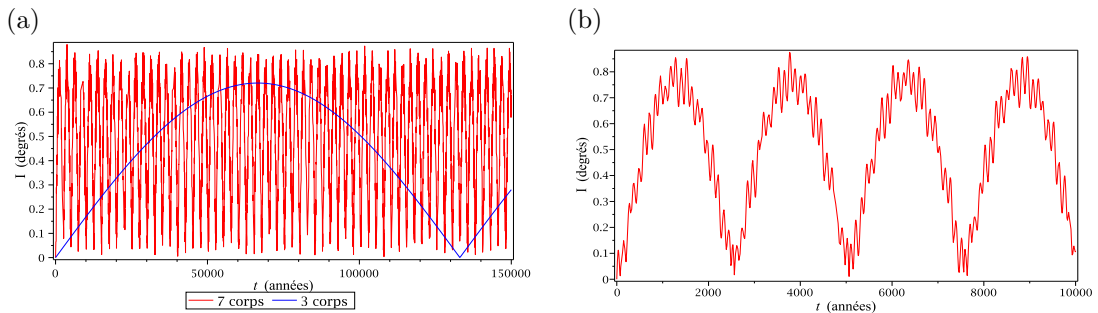


FIGURE 4.22 – (a) comparaison de l'inclinaison (en degrés) du Lagrangien d'Umbriel, en rouge, lorsqu'il y a cinq corps et lorsque l'on tient compte de l'aplatissement d'Uranus, et en bleu, lorsqu'on ne tient compte que d'Umbriel, sans aplatissement, et (b) inclinaison du Lagrangien sur une période de temps plus courte.

L'amplitude augmente par rapport au modèle de base, et la grande période diminue fortement.

TABLE 4.18 – Comparaison de l'amplitude et des périodes de l'inclinaison du Lagrangien d'Umbriel pour le modèle de base et pour le modèle avec aplatissement d'Uranus et les cinq corps.

	Amplitude (degrés)	Période (petite) (années)	Période (grande) (années)
I_{base}	0.36		133075
$I_{7\text{corps}}$	0.4	110	2510

La Figure 4.23 représente les différences des longitudes des péricentres et nœuds ascendants en fonction du temps. Il y a une libration pour les péricentres entre 180° et -60° et de temps en temps une circulation (par exemple, il y a une circulation après 500 ans). Par contre, les nœuds sont en libration continue entre -60° et 60° . Ils tournent donc ensemble.

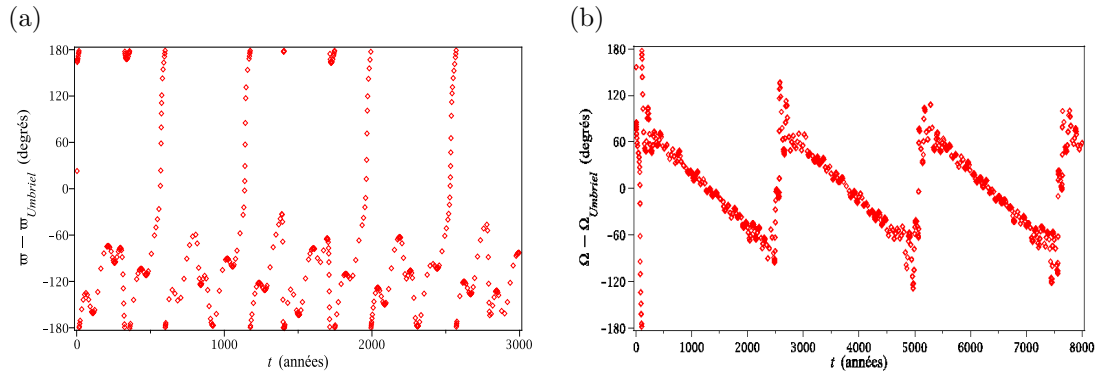


FIGURE 4.23 – Différence des longitudes du péricentre (a) et des longitudes des nœuds ascendants (b) du Lagrangien de Umbriel (ϖ et Ω) et de Umbriel (ϖ_{Umbriel} et Ω_{Umbriel}) (en degrés) en fonction du temps (en années).

4.5.4 Lagrangien de Obéron

Terminons cette section en plaçant un Lagrangien au point de Lagrange L_4 d'Obéron.

La Figure 4.24 représente la courbe de l'excentricité du Lagrangien d'Obéron en fonction du temps.

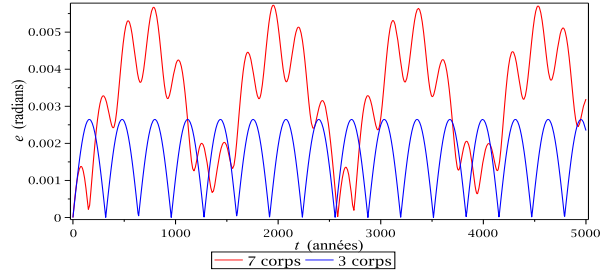


FIGURE 4.24 – Comparaison de l'excentricité (en radians) du Lagrangien d'Obéron, en rouge, lorsqu'il y a cinq corps et lorsque l'on tient compte de l'aplatissement d'Uranus, et en bleu, lorsqu'on ne tient compte que d'Obéron, sans aplatissement.

L'amplitude a augmenté et la petite période pour le Lagrangien a diminué de 89 ans.

TABLE 4.19 – Comparaison de l'amplitude et des périodes de l'excentricité du Lagrangien d'Obéron pour le modèle de base et pour le modèle avec aplatissement d'Uranus et les cinq corps.

	Amplitude (radians)	Période (petite) (années)	Période (grande) (années)
e_{base}	0.0013	319	
$e_{7\text{corps}}$	0.0028	230	1920

L'inclinaison du Lagrangien d'Obéron est représentée sur la Figure 4.25.

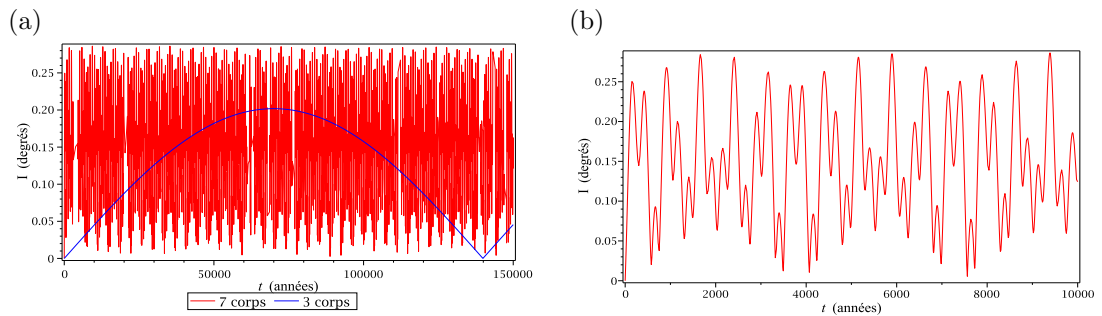


FIGURE 4.25 – (a) comparaison de l'inclinaison (en degrés) du Lagrangien d'Obéron, en rouge, lorsqu'il y a cinq corps et lorsque l'on tient compte de l'aplatissement d'Uranus, et en bleu, lorsqu'on ne tient compte que d'Obéron, sans aplatissement, et (b) inclinaison du Lagrangien sur une période de temps plus courte.

L'amplitude de l'inclinaison a donc augmenté de 0.08° et sa période de libration a elle fortement diminué.

TABLE 4.20 – Comparaison de l'amplitude et de la période de l'inclinaison du Lagrangien d'Obéron pour le modèle de base et pour le modèle avec aplatissement d'Uranus et les cinq corps.

	Amplitude (degrés)	Période (années)
I_{base}	0.10	139875
$I_{7\text{corps}}$	0.14	4000

Les différences des longitudes des péricentres et nœuds ascendants en fonction du temps sont représentées sur la Figure suivante (4.26). Les péricentres circulent, ils ne tournent donc pas à la même vitesse. Par contre, les nœuds sont en libration et de temps en temps il y a une circulation.

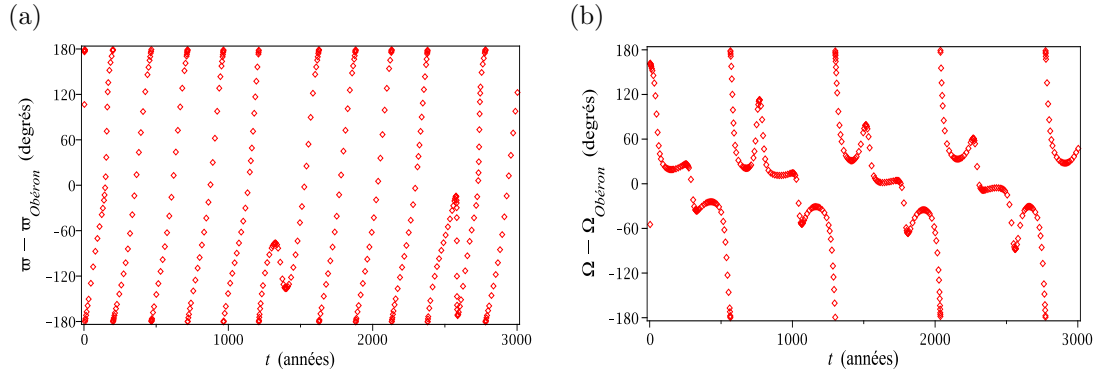


FIGURE 4.26 – Différence des longitudes du péricentre (a) et des longitudes des nœuds ascendants (b) du Lagrangien de Obéron (ϖ et Ω) et de Obéron ($\varpi_{\text{Obéron}}$ et $\Omega_{\text{Obéron}}$) (en degrés) en fonction du temps (en années).

4.6 Résumé des valeurs

La Table 4.21 rassemble toutes les valeurs obtenues dans la section précédentes (4.5).

TABLE 4.21 – Résumé des valeurs des sections précédentes (amplitudes et périodes des Lagrangiens).

		Amplitude	Période (petite) (années)	Période (grande) (années)
Miranda	e_{base}	0.00255		1140
	$e_{7\text{corps}}$	0.00255		1193
	I_{base}	4.28		499303
	$I_{7\text{corps}}$	1.3		23575
Ariel	e_{base}	0.0033	113	
	$e_{7\text{corps}}$	0.0034	118	7100
	I_{base}	0.299		49460
	$I_{7\text{corps}}$	0.311	120	2006
Umbriel	e_{base}	0.0053	304	
	$e_{7\text{corps}}$	0.0047	280	
	I_{base}	0.36		133075
	$I_{7\text{corps}}$	0.4	110	2510
Titania	e_{base}	0.00134	219	
	$e_{7\text{corps}}$	0.05	293	19712
	I_{base}	0.142°		96098
	$I_{7\text{corps}}$	0.37°	756	22000
Obéron	e_{base}	0.0013	319	
	$e_{7\text{corps}}$	0.0028	230	1920
	I_{base}	0.10		139875
	$I_{7\text{corps}}$	0.14		4000

L'ajout de l'aplatissement du corps central dans le modèle, ainsi que l'ajout de satellites influencent le comportement de l'excentricité et de l'inclinaison. Suivant les cas, cette influence est une diminution ou une augmentation de l'amplitude ou de la période de libration.

4.7 Péricentres et nœuds

4.7.1 Circulation

La différence des longitudes des péricentres de Titania et de son Lagrangien (dont $a_0 = 0$ km), en fonction du temps à l'allure représentée sur la Figure 4.27.

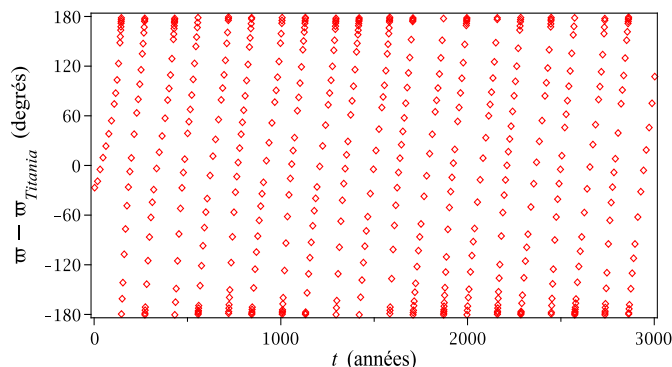


FIGURE 4.27 – Différence des longitudes des péricentres de Titania et de son Lagrangien en fonction du temps.

On peut conclure de ce graphe que les péricentres ne tournent pas ensemble, et donc, qu'il y a une circulation.

Décomposons maintenant ce graphe en ses parties forcée et libres. Sur la Figure 4.28, on représente l'amplitude forcée par une droite bleue et les amplitudes libres par des points rouges. Ces amplitudes sont représentées en fonction de leur fréquence correspondante.

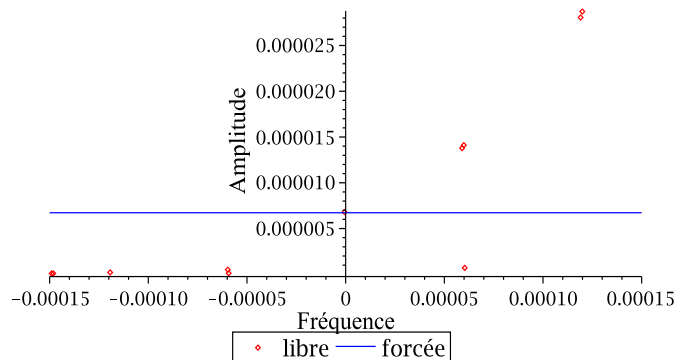


FIGURE 4.28 – Amplitude forcée (droite bleue) et amplitudes libres (points rouges) en fonction de leur fréquence correspondante.

On remarque que deux vecteurs ont une amplitude largement plus grande que celle du vecteur forcé, avec également la fréquence la plus importante. Ce sont donc ces deux vecteurs qui vont donner la forme générale de la courbe. Mais il y a également deux vecteurs avec une amplitude

plus faible mais toujours supérieure à celle du vecteur forcé, et finalement un vecteur dont l'amplitude est égale à celle du vecteur forcé mais avec une fréquence proche de zéro. Ce sont ces cinq vecteurs qui dominent dans le comportement de la courbe car les vecteurs suivants ont une amplitude très faible et n'influence donc que légèrement le comportement de la courbe.

Nous pouvons maintenant construire le graphe de la différence des longitudes des péricentres en prenant la partie réelle en fonction de la partie imaginaire. Pour commencer, on trace la courbe correspondant au vecteur forcé et au vecteur libre ayant l'amplitude la plus grande, et dans ce cas, la fréquence la plus élevée (Fig. 4.29 (a)). Ensuite, sur la Fig. 4.29 (b) on ajoute le vecteur ayant la deuxième amplitude la plus grande, ensuite (c) la troisième, (d) la quatrième, (e) la cinquième et pour terminer, toutes les amplitudes et fréquences (f).

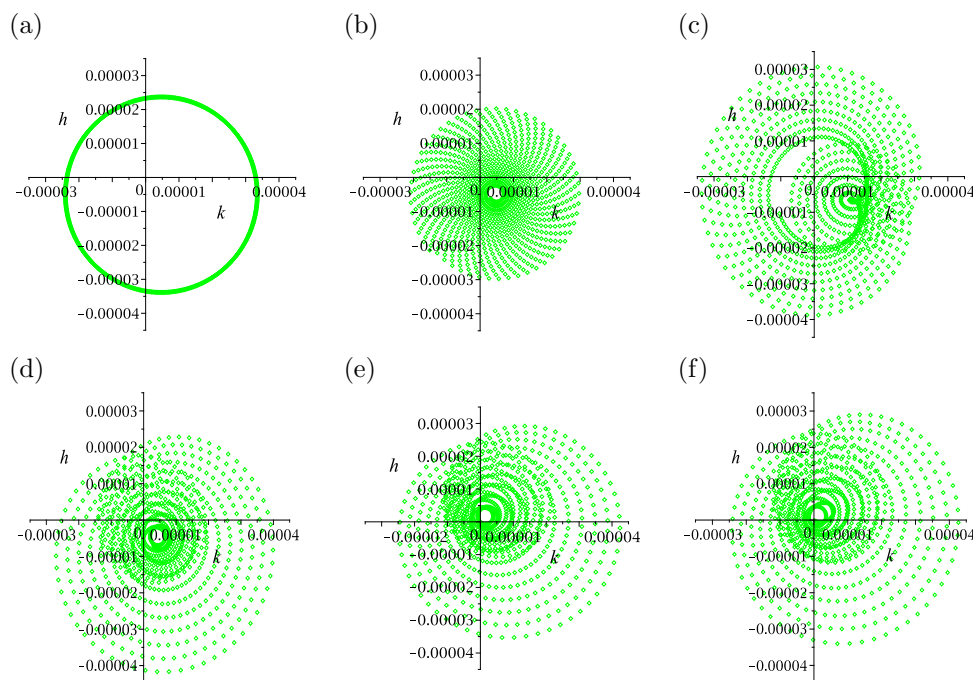


FIGURE 4.29 – Partie réelle en fonction de la partie imaginaire de la différence des longitudes des péricentres de Titania et son Lagrangien. On trace la courbe correspondant au vecteur forcé ainsi que le vecteur libre ayant l'amplitude la plus grande (a), puis on ajoute la 2^e plus grande amplitude (b), puis la 3^e (c), la 4^e (d), la 5^e (e), en enfin tous les vecteurs (f).

Le graphe comprenant les cinq amplitudes les plus importantes (Fig. 4.29 (e)) est fort semblable au graphe représenté en (f). Comme dit précédemment, les amplitudes inférieures au cinq plus grandes n'ont pas beaucoup d'influence sur le graphe car elles sont proches de zéro.

Le dernier graphe (Fig. 4.29 (f)) comprend l'origine d'où la circulation sur la Figure 4.27.

4.7.2 Libration et circulation

Lorsque $a_0 = 0$ km pour le Lagrangien d'Obéron, on obtient la différence des longitudes du péricentre suivante (Fig. 4.30).

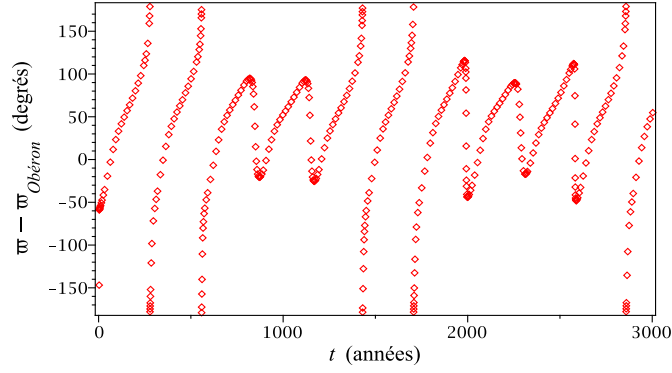


FIGURE 4.30 – Différence des longitudes des péricentres d'Obéron et de son Lagrangien en fonction du temps.

On remarque qu'il y a une alternance entre la libration et la circulation. Décomposons le mouvement en ses parties libres et forcée.

Les amplitudes des différents vecteurs, en fonction de leurs fréquences respectives, sont représentées sur la Figure 4.31.

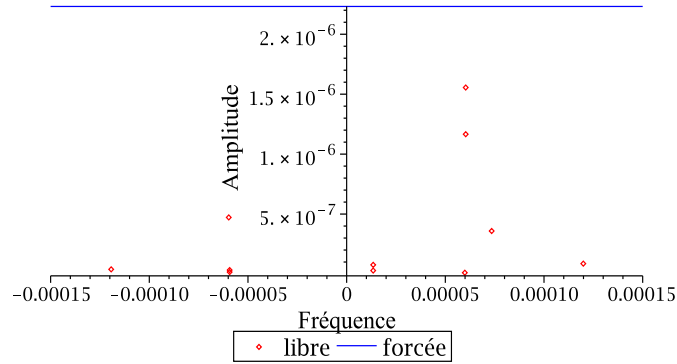


FIGURE 4.31 – Amplitude forcée (droite bleue) et amplitudes libres (points rouges) en fonction de leur fréquence correspondante.

On remarque que les amplitudes des vecteurs libres sont toutes inférieures à l'amplitude du vecteur forcé, mais la somme de plusieurs d'entre elles peut dépasser cette amplitude forcée.

Comme dans la sous-section précédente (4.7.1), on peut décomposer le mouvement en sa partie réelle en fonction de sa partie imaginaire.

Les trois vecteurs ayant l'amplitude la plus élevée, et la même fréquence (en valeur absolue), vont également donner la forme générale de la courbe.

Si on ajoute progressivement les vecteurs ayant la plus grande amplitude au vecteur forcé, on obtient la Figure 4.32 où le graphe représenté en (a) représente le vecteur forcé avec le vecteur ayant la plus grande amplitude. On ajoute ensuite la deuxième plus grande amplitude sur le graphe (b), ensuite la 3^e sur le (c) et ainsi de suite jusqu'à obtenir le graphe (f) comprenant tous les vecteurs.

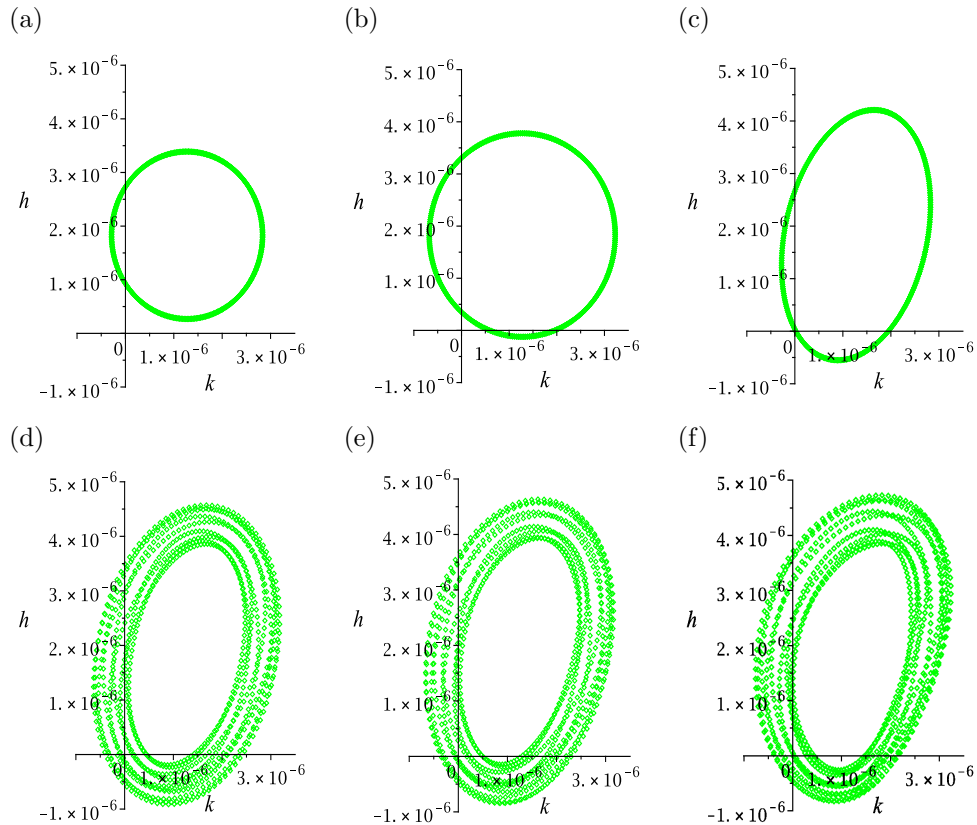


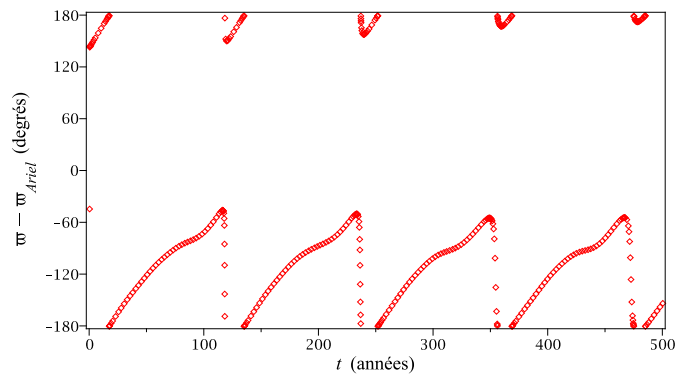
FIGURE 4.32 – Partie réelle en fonction de la partie imaginaire de la différence des longitudes des péricentres d'Obéron et son Lagrangien. On trace la courbe correspondant au vecteur forcé ainsi que le vecteur libre ayant l'amplitude la plus grande (a), puis on ajoute la 2^e plus grande amplitude (b), puis la 3^e (c), la 4^e (d), la 5^e (e), en enfin tous les vecteurs (f).

La forme (une ellipse) est bien donnée par les vecteurs ayant les trois plus grandes amplitudes. La quatrième plus grande amplitude a une fréquence plus élevée d'où le graphe représenté en (d). Ensuite, les graphes suivant ne changent plus vraiment car les amplitudes suivantes sont faibles.

Le dernier graphe (Fig. 4.32 (f)) comprend parfois l'origine et parfois ne la comprend pas, d'où la circulation ou la libration sur la Figure 4.30.

4.7.3 Libration

Dans la sous-section 4.5.2, nous avons obtenu le graphe de la différence des longitudes du péricentre en fonction du temps (Fig. 4.20 (a)). Le revoici :



Comme dit précédemment, la différence des longitudes des péricentres est en libration. Décomposons le mouvement en ses parties libres et forcée.

Les amplitudes des différents vecteurs, en fonction de leurs fréquences respectives, sont représentées sur la Figure 4.33.

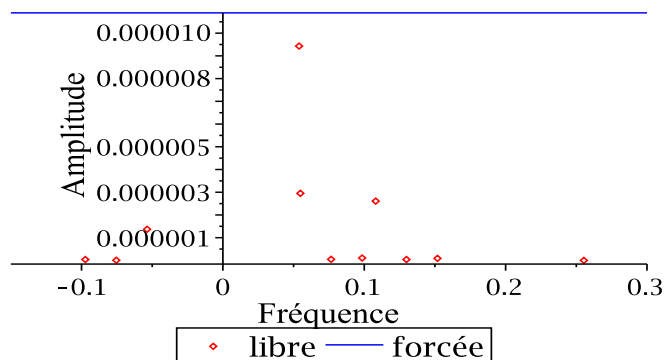


FIGURE 4.33 – Amplitude forcée (droite bleue) et amplitudes libres (points rouges) en fonction de leur fréquence correspondante.

On remarque que les amplitudes des vecteurs libres sont toutes inférieures à l'amplitude du vecteur forcé.

Comme dans les sous-sections précédentes (4.7.1 et 4.7.2), on peut décomposer le mouvement en sa partie réelle en fonction de sa partie imaginaire.

Les quatre vecteurs ayant l'amplitude la plus élevée, vont également donner la forme générale de la courbe.

Comme précédemment, on ajoute progressivement les vecteurs ayant la plus grande amplitude au vecteur forcé et on obtient les graphes suivants (Fig. 4.34).

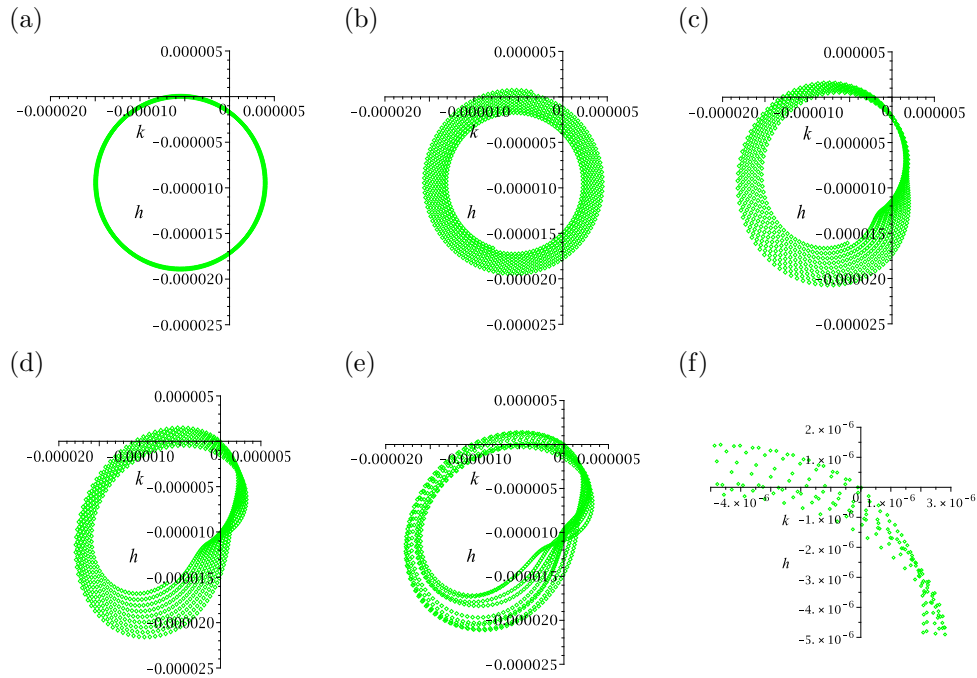


FIGURE 4.34 – Partie réelle en fonction de la partie imaginaire de la différence des longitudes des péricentres d'Ariel et son Lagrangien. On trace la courbe correspondant au vecteur forcé ainsi que le vecteur libre ayant l'amplitude la plus grande (a), puis on ajoute la 2^e plus grande amplitude (b), puis la 3^e (c), la 4^e (d) et tous les vecteurs (e). Ensuite on regarde ce qu'il se passe autour de zéro (f).

La forme générale est bien donnée par les vecteurs ayant les quatre plus grandes amplitudes. Le graphe (d) est fort semblable à celui comprenant tous les vecteurs (e) car les amplitudes suivantes sont faibles.

Le dernier graphe (Fig. 4.34 (f)), qui est un agrandissement de la courbe autour de zéro, nous montre que la courbe comprend parfois l'origine, mais ne la dépasse jamais, d'où la libration sur la Figure 4.20 (a).

4.8 Sensibilité

Dans son article ([8]), Helena Morais dit que lorsqu'on place une particule au point de Lagrange L_4 de Titania et que l'on perturbe le système avec Umbriel, l'excentricité atteint 0.037 radian avec une périodicité de 9500 ans. Or, dans la section 4.3, ce n'est pas le cas.

Si on place un Lagrangien en L_4 (et donc $a_0 = 0$), alors on obtient :

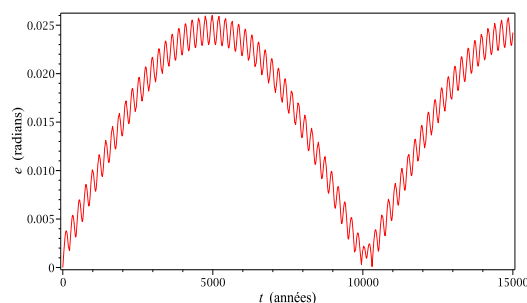


FIGURE 4.35 – (Excentricité (en radians) du Lagrangien de Titania en fonction du temps (en années).

L'excentricité atteint 0.026 radian et la période est de 10130 ans.

Cette différence peut être expliquée par une petite différence dans les conditions initiales que l'on a prises. En effet, si on fait varier le J_2 de quelques pourcents, alors les valeurs de l'excentricité et de la période changent. Sur la Figure 4.36, on a représenté les graphes de l'excentricité lorsque l'on diminue le J_2 de 5%, de 3% et de 1% dans la colonne de gauche et ensuite, dans la colonne de droite, lorsqu'on l'augmente de 1%, de 3% et enfin de 5%.

Les valeurs de l'excentricité maximale atteinte et de la grande période de libration sont reprises dans la Table 4.22 :

TABLE 4.22 – Valeurs de l'excentricité maximale atteinte et de la grande période de libration, lorsque l'on fait varier la valeur du J_2 .

		e (radians)	T (années)
J_2	-5%	0.011	3600
	-3%	0.014	4800
	-1%	0.0195	7500
	+1%	0.039	16000
	+3%	0.3	126500
	+5%	0.03	12700

Ces graphes et cette Table nous montrent qu'un petit changement de la valeur du J_2 peut mener à de grands changements dans l'excentricité et sa période. Le plus grand changement s'effectue ici lorsque l'on prend comme condition initiale le J_2 diminué de 5% de sa valeur. Dans ce cas là, l'excentricité atteint la valeur de 0.3 radian et la période est de 126500 ans. À cet endroit, on se situe certainement très près de la résonance séculaire. L'excentricité est donc assez sensible lorsqu'on fait varier le J_2 .

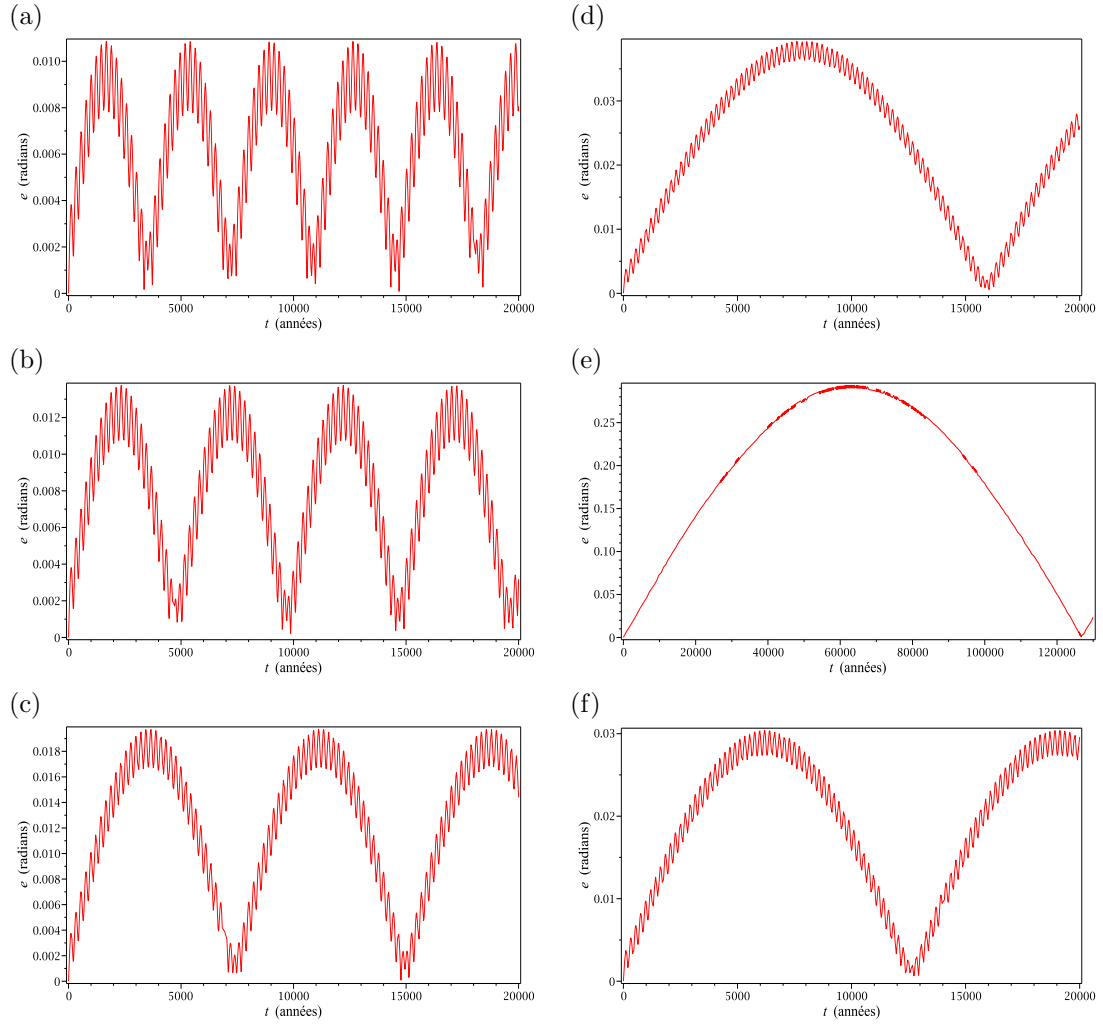


FIGURE 4.36 – Excentricité (en radians) du Lagrangien de Titania en fonction du temps (en années) lorsque le J_2 est diminué de (a) 5%, (b) 3%, (c) 1% et lorsqu'il est augmenté de (d) 1%, (e) 3% et enfin (f) 5%.

On peut également regarder l'évolution de l'excentricité lorsque l'on fait varier le demi-grand axe de Umbriel ($a_{Umbriel}$).

Les valeurs sont rassemblées dans la Table 4.23.

Tout comme pour le J_2 , des petits changements dans le demi-grand axe d'Umbriel peut avoir des conséquences sur l'excentricité et la période du Lagrangien, surtout lorsque ce changement est une diminution d'1% de ce demi-grand axe.

TABLE 4.23 – Valeurs de l'excentricité maximale atteinte et de la grande période de libration, lorsque l'on fait varier le demi-grand axe d'Umbriel.

		e (radians)	T (années)
$a_{Umbriel}$	-5%	0.0045	1400
	-3%	0.08	3200
	-1%	0.1	45000
	+1%	0.014	4600
	+3%	0.009	2300
	+5%	0.0077	1600

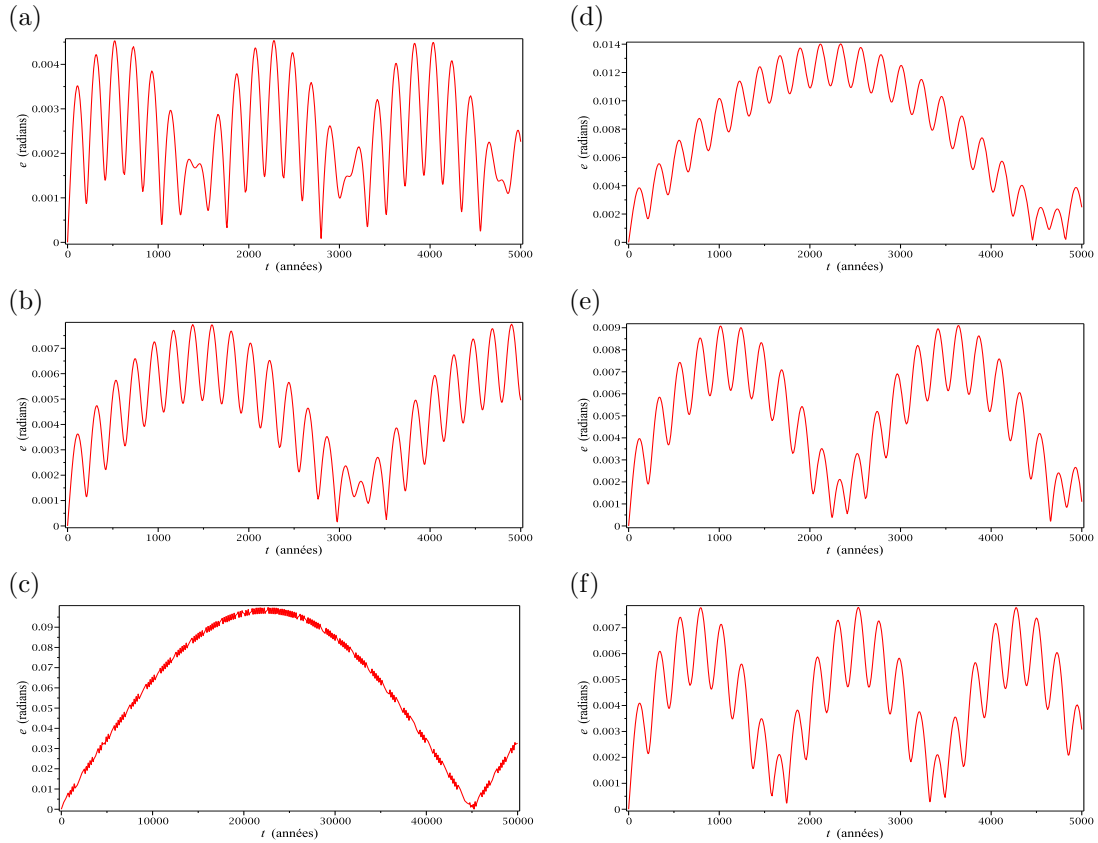


FIGURE 4.37 – Excentricité (en radians) du Lagrangien de Titania en fonction du temps (en années) lorsque le demi-grand axe d'Umbriel est diminué de (a) 5%, (b) 3%, (c) 1% et lorsqu'il est augmenté de (d) 1%, (e) 3% et enfin (f) 5%.

On peut ensuite regarder ce qu'il se passe lorsque l'on fait varier le demi-grand axe de Titania (Table 4.24), la masse d'Umbriel (Table 4.25) et enfin la masse de Titania (Table 4.26).

TABLE 4.24 – Valeurs de l'excentricité maximale atteinte et de la grande période de libration, lorsque l'on fait varier le demi-grand axe de Titania.

		e (radians)	T (années)
$a_{Titania}$	-5%	0.013	3100
	-3%	0.0145	4200
	-1%	0.0195	6800
	+1%	0.045	19500
	+3%	0.043	22000
	+5%	0.013	6800

Une diminution du demi-grand axe de Titania implique une diminution de la valeur de l'excentricité et de sa période. Par contre, une augmentation de 1% ou de 3% augmente l'excentricité et sa période.

TABLE 4.25 – Valeurs de l'excentricité maximale atteinte et de la grande période de libration, lorsque l'on fait varier la masse d'Umbriel.

		e (radians)	T (années)
$m_{Umbriel}$	-5%	0.028	11700
	-3%	0.027	11000
	-1%	0.026	10400
	+1%	0.0255	10000
	+3%	0.025	9300
	+5%	0.024	9000

Un changement dans la masse d'Umbriel n'a pas beaucoup d'effet sur l'excentricité ni sa période.

TABLE 4.26 – Valeurs de l'excentricité maximale atteinte et de la grande période de libration, lorsque l'on fait varier la masse de Titania.

		e (radians)	T (années)
$m_{Titania}$	-5%	0.034	14300
	-3%	0.8	355000
	-1%	0.04	15500
	+1%	0.02	7500
	+3%	0.014	5000
	+5%	0.011	3600

Une diminution de la masse de Titania de 2% implique une grande variation de l'excentricité et une grande augmentation de la période.

L'excentricité est donc sensible aux conditions initiales. Il est alors normal qu'on ne trouve pas exactement les mêmes valeurs que dans l'article d'Helena Morais car un petit changement dans les conditions initiales peut mener à de grands changements dans les valeurs de l'excentricité ou de la période de libration.

CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons tout d'abord construit le Hamiltonien du système comprenant Saturne, un satellite (Téthys ou Dioné) et enfin un satellite Lagrangien. Nous avons ensuite étudié sa partie quadratique qui est une composition de deux mouvements elliptiques dont les fréquences ne dépendent que des masses des corps. Nous avons pu déduire de cet Hamiltonien que les points de Lagrange L_4 et L_5 peuvent être des points stables, des foyers stables ou instables, suivant le rapport des masses des corps du système. Dans le cas de Saturne, ce sont des points stables, ce qui nous permet de calculer les périodes de librations des Lagrangiens.

L'intégrateur numérique (RK4) utilisé dans le chapitre 2 a confirmé les résultats obtenus dans le chapitre 1.

Nous avons ensuite construit une théorie séculaire pour le problème des trois corps dont le troisième corps est un Lagrangien. Nous avons validé la théorie grâce à l'intégrateur numérique. Nous l'avons ensuite adaptée au problème des N corps avec aplatissement du corps central. Nous avons également décomposé l'excentricité et l'inclinaison en leurs parties forcée et propre. Dans le cas du modèle des trois corps, cette décomposition donne un cercle car le vecteur forcé est une constante. Si on ajoute l'aplatissement, ce vecteur n'est plus fixe. On obtient alors des schémas plus complexes. Ceux-ci se complexifient encore plus lorsqu'on ajoute d'autres corps dans le système.

Finalement nous avons appliqué la théorie séculaire au système d'Uranus. Cela nous a permis d'identifier des résonances séculaires dans ce système. Dans le cas de l'excentricité, ces résonances augmentent considérablement la valeur de l'excentricité, ce qui peut rendre le modèle invalide. Nous avons ensuite analysé la sensibilité de l'excentricité aux conditions initiales. Il en est ressorti qu'elle est sensible à de faibles variations du J_2 , du demi-grand axe d'Umbriel et de Titania et enfin de la masse de Titania. Par contre, elle n'est pas sensible à la variation de la masse d'Umbriel.

- [1] CHRISTOU A., NAMOUNI F., MORAIS M.H.M., *The long term stability of coorbital moons of the satellites of Saturn, I. Conservative case*, Icarus, 192, 2007, 106-116.
- [2] DEPRIT A., *Limiting Orbits around the Equilateral Centers of Libration*, The Astronomical Journal, 71, 2, 1966, 77-87.
- [3] DEPRIT A., *Stability of the Triangular Lagrangian Points*, The Astronomical Journal, 72, 2, 1967, 173-179.
- [4] HUBAUX C., *L'orbite et l'attitude de Gaia, chapitre 1 : Lagrangian points*, mémoire de fin d'études, faculté des sciences, département de mathématiques, FUNDP Namur.
- [5] LEMAÎTRE A., *Astronomie*, cours magistral 2009, faculté des sciences, département de mathématiques, FUNDP Namur.
- [6] MALHOTRA R., FOX K., MURRAY C.D., NICHOLSON P.D., *Secular perturbations of the Uranian satellites : theory and practice*, Astronomy and Astrophysics, 221, 1989, 348-358.
- [7] MESSAGE P.J., *The Dominant Features of the Long-Period Librations of the Trojan Minor Planets*, Lectures in Applied Mathematics 6, 1966, 70-78.
- [8] MORAIS M.H.M., *A secular theory for Trojan-type motion*, Astronomy and Astrophysics, 350, 1999, 318-326.
- [9] MORAIS M.H.M., *Hamiltonian formulation of the secular theory for Trojan-type motion*, Astronomy and Astrophysics, 369, 2001, 677-689.
- [10] MORBIDELLI A., *Modern Celestial Mechanics, Aspects of Solar System Dynamics*, ed. Taylor et Francis, Londres.
- [11] MURRAY C.D., DERMOTT S.F., *Solar System Dynamics*, Cambridge University Press, New York, 1999.
- [12] MURRAY C.D., COOPER N.J., EVANS M.W. & BEURLE K., *A new co-orbital companion for Dione*, Icarus, 179, 2005, 222-234.
- [13] OBERTI P., VEILLET C., CATULLO V., *Lagrangian satellites of Tethys and Dione, I. Reduction of observations*, Astronomy and Astrophysics, 80, 1989, 289-297.
- [14] OBERTI P., *Lagrangian satellites of Tethys and Dione, II. Theory of motion*, Astronomy and Astrophysics, 228, 1990, 275-283.
- [15] OBERTI P., VIENNE A., *An upgraded theory for Helene, Telesto, and Calypso*, Astronomy and Astrophysics, 397, 2003, 353-359.
- [16] SICARDY B., *Stability of the triangular Lagrange points beyond Gascheau's value*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 107, 2010, 145-155.
- [17] Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology (avril 2011) : http://ssd.jpl.nasa.gov/?sat_phys_par.